سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عمان 2040 OmanVision
نتقدم بثقة Moving Forward with Confidence

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية
1444 هـ - 2022 م

سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1444هـ - 2022م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

© مطبعة جامعة كامبريدج ووزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

يخضع هذا الكتاب لقانون حقوق الطباعة والنشر، ويخضع للاستثناء التشريعي
المسموح به قانونًا ولأحكام التراخيص ذات الصلة.
لا يجوز نسخ أي جزء من هذا الكتاب من دون الحصول على الإذن المكتوب من
مطبعة جامعة كامبريدج ومن وزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٢ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب – الرياضيات للصف الحادي عشر – من سلسلة
كامبريدج A Level Pure Mathematics 1 & Cambridge International AS –
للمؤلف سو بمبرتن، و Mathematics 1 وProbability & Statistics 1 للمؤلف دين
تشارلمرز و A Level Further Mathematics & Cambridge International AS
للمؤلفين لي ماكلفي و مارتين كروزير.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.
لا تتحمَّل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه توفُّر أو دقة المواقع الإلكترونية
المستخدمة في هذا الكتاب، ولا تؤكِّد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق
وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه

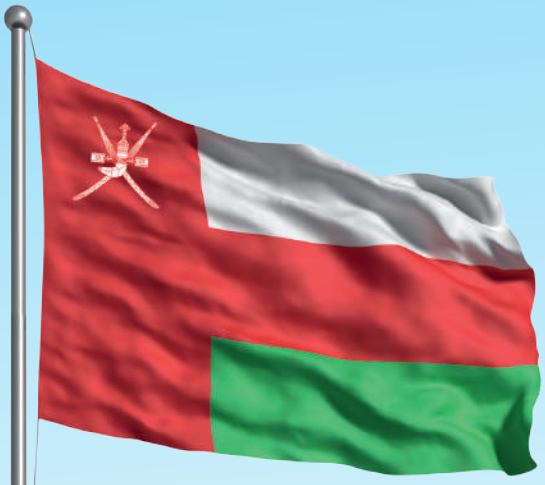
جميع حقوق الطبع والتأليف والنشر محفوظة لوزارة التربية والتعليم

**ولا يجوز طبع الكتاب أو تصويره أو إعادة نسخه كاملاً أو مجزّأً أو ترجمته
أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات بهدف تجاري بأي شكل من الأشكال
إلا بإذن كتابي مسبق من الوزارة، وفي حالة الاقتباس القصير يجب ذكر المصدر.**

المغفور لـه
السلطان قابوس بن سعيد
-طيّب اللّه ثراه-

حضرة صاحب الجلالة
السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم
-حفظه اللّه ورعاه-

سلطنـــــة عُمـــــان



النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يا رَبَّنا احْفَظْ لنا جَلالَةَ السُّلْطان
وَالشَّعْبَ في الأَوْطان بِالْعِزِّ والأَمان
وَلْيَدُمْ مُؤَيَّدًا عاهِلاً مُمَجَّدًا
بِالنُّفوسِ يُفْتَدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فارْتَقي هامَ السَّماء وَامْلَئي الْكَوْنَ الضِّياء
وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

المقدمة xiii

الوحدة الأولى: المعادلات والمتباينات والدوالّ التربيعية

١–١ الإكمال إلى مُربّع ١٩

١–١أ كتابة العبارات الجبرية بطريقة الإكمال إلى مُربّع ١٩

١–١ب استخدام الإكمال إلى مُربّع لحلّ المعادلات التربيعية ٣٢

١–٢ التمثيل البياني للدالّة التربيعية ٢٥

١–٣ جذور المعادلة التربيعية ٣٠

١–٤ الصيغة التربيعية ٣٢

١–٥ حلّ المعادلات الآنيّة (معادلة خطّية ومعادلة تربيعية) ٣٤

١–٦ حلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا ٣٧

١–٧ حلّ المتباينات التربيعية ٣٩

١–٨ التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية ٤٣

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى ٤٧

المقدمة

قد تكون الرياضيات عاملًا مساعدًا في تغيير مسار حياتك. فمن ناحية نرى أن العديد من المقررات في الجامعة تتطلب أن تكون كفوءًا في الرياضيات، أو تسعى إلى استقطاب الطلبة الذين يجيدون هذه المادة. ومن ناحية أخرى، تتدرّب من خلالها على تعلم التفكير بشكل أكثر دقة ومنطقية، مع التشجيع على الإبداع أيضًا. فممارسة الرياضيات تشبه إلى حدّ بعيد ممارسة الفن، فكما يحتاج الفنان إلى إتقان أدواته (استخدام فرشاة الرسم، والقماش) وإلى فهم الأفكار النظرية (الأبعاد والألوان وما إلى ذلك)، كذلك يفعل عالم الرياضيات (باستخدام فروع الجبر والهندسة، والذي ستتعرف عليها في هذا الكتاب). لكن هذا ليس سوى الناحية العملية من الموضوع، إذ كما يأتي الفرح في الفن من الإبداع، عندما يستخدم الفنان أدواته للتعبير عن الأفكار بأساليب جديدة، كذلك يكون شعور الفرح العميق في الرياضيات عند إنجاز حلّ المسائل المطروحة.

قد تتساءل عن ماهية **المسألة الرياضية**، ولا شكّ أنه سؤال وجيه، إذ قام العديد من الأشخاص بمحاولات للإجابة عنه. وقد ترغب في تقديم جوابك الخاص عن هذا السؤال، والتفكير في كيفية تطوّره مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي سؤال رياضي لا تعرف كيف تجيب عنه على الفور، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا للإجابة عنها، وقد تضطر إلى تجربة طرائق مختلفة، باستخدام أدوات أو أفكار مختلفة، بنفسك أو مع الآخرين، حتى تكتشف أخيرًا طريقة لحلّها. وقد يطول الوقت إلى ساعات أو أيام أو حتى أسابيع لتحقيقها، لكنك في النهاية تشعر بفرح إنجاز الحلّ على الرغم من الجهد الذي بذلته.

بالإضافة إلى الأفكار الرياضية التي ستتعلمها في هذا الكتاب، فإن مهارات حلّ المسائل التي ستطورها سوف تساعدك أيضًا في مسيرة حياتك، مهما كان التخصص الذي ستختاره بعد تخرّجك. فكثيرًا ما يواجه الطلبة مسائل تحتاج إلى حل، سواء كان ذلك في العلوم أو الهندسة أو الرياضيات أو المحاسبة أو القانون أو غيرها، وسيكون شعور الثقة والعمل بشكل منهجي مفيدًا إلى أقصى الحدود.

سيدعمك هذا الكتاب لتعلم الرياضيات المطلوبة للاختبارات ولتطوير مهاراتك في حل المسائل الرياضية.

إن التواصل مع الآخرين سواءٌ عبر الكلام أو الكتابة أو الرسم هو من أهم ما يميز الإنسان، وهذا ينطبق تمامًا على الرياضيات. ألم يكن الحساب (الرياضيات) أحد أركان الفنون السبعة بحسب المفهوم اللاتيني؟ أولم يكن علماء الرياضيات العرب قديمًا يشيرون إلى الرياضيات على أنها 'فن'؟ فلا غنى عن الرياضيات لبناء جسور التواصل الإنساني، خلافًا للاعتقاد السائد بأن الرياضيات مادة جافة لا تتخطّى حدود الكتب المدرسية. والحقيقة أن التواصل الرياضي يأتي بأشكال عديدة، ومناقشة الأفكار الرياضية مع الزملاء جزء رئيسي من عمل كل عالم رياضيات. فأثناء دراستك هذه المادة، ستعمل على حل العديد من المسائل، وسيساعدك استكشافها بالتعاون مع زملائك في الفصل على تطوير فهمك وتفكيرك، بالإضافة إلى تحسين مهارات التواصل (الرياضية) لديك. وتشكل القدرة على إقناع الآخرين بصحة تفكيرك، لفظيًا أولًا ثم كتابيًا، جوهر المهارة الرياضية القائمة على 'البرهان'.

النمذجة أو التمثيل الرياضي هو المكان الذي تتقاطع فيه الرياضيات مع 'العالم الحقيقي'. ثمّة العديد من المواقف التي يحتاج فيها الإنسان إلى التوقع أو فهم ما يحدث في العالم، وفي هذا المجال تؤمّن الرياضيات كثيرًا من أدوات المساعدة. إذ ينظر علماء الرياضيات إلى عالم الواقع محاولين التعبير عن قضاياه الرئيسية في شكل معادلات، وبالتالي بناء تمثيل حقيقي له. ويستخدمون هذا التمثيل للقيام بتوقعات حيثما أمكن؛ وإذا لزم الأمر، سيحاولون تحسين التمثيل للوصول إلى توقعات أفضل. تشمل الأمثلة التوقعات بحالة الطقس، وتمثيل تغير المناخ، وعلم الطب الشرعي (لفهم حادثة ما أو جريمة)، وتمثيل التغير السكاني في ممالك الإنسان والحيوان والنبات، وتمثيل سلوك الطائرات والسفن، وتمثيل الأسواق المالية، وغيرها... وفي هذا الكتاب، سنطور الفهم والقدرة على نمذجة المحتوى رياضيًا وحل مسائل متنوعة.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- أنشطة أستكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بإغناء تفكير زميلهم، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة عن نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، يجري بعدها مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.
- الأسئلة المصنفة برمز النجمة ' ★ ، ★ ، ★ أو ★ ' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'النمذجة' أو 'حل المسائل' أو لا ترتبط بهدف محدّد بل تركّز على ترابط المفاهيم بعضها ببعض، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا، بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). إنها أيضًا الطريقة التي يكتب فيها علماء الرياضيات المحترفون معلوماتهم. وبما أن الاختبارات الجديدة قد تتضمن أسئلة غير مألوفة لديك، فكونك مشاركًا نشطًا في تعلم الرياضيات، سوف يمكّنك من التعامل مع مثل هذه الأسئلة تعاملًا أكثر نجاحًا.

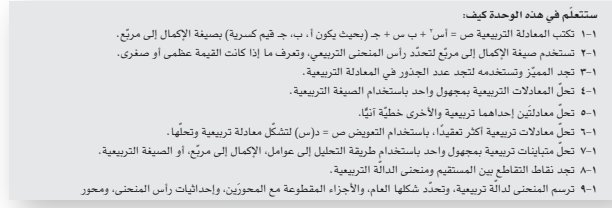
توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد. إن استكشاف هذه المواقع الإلكترونية ليس نشاطًا إلزاميًا، ولكنه يساعد على تعزيز فهمك وعمق معرفتك بشكل كبير من خلال استكمال الأنشطة المقترحة.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون دراستك لهذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.


ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تكتب المعادلة التربيعية ص = أس^{٢} + ب س + جـ (بحيث يكون أ، ب، جـ قيم كسرية) بصيغة الإكمال إلى مربّع.

١-٢ تستخدم صيغة الإكمال إلى مربّع لتحدّد رأس المنحنى التربيعي، وتعرف ما إذا كانت القيمة عظمى أو صغرى.

١-٣ تجد المميّز وتستخدمه لتجد عدد الجذور في المعادلة التربيعية.

١-٤ تحلّ المعادلات التربيعية بمجهول واحد باستخدام الصيغة التربيعية.

١-٥ تحلّ معادلتَين إحداهما تربيعية والأخرى خطيّة آنيًا.

١-٦ تحلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا، باستخدام التعويض ص = د(س) لتشكّل معادلة تربيعية وتحلّها.

١-٧ تحلّ متباينات تربيعية بمجهول واحد باستخدام طريقة التحليل إلى عوامل، الإكمال إلى مربّع، أو الصيغة التربيعية.

١-٨ تجد نقاط التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية.

١-٩ ترسم المنحنى لدالّة تربيعية، وتحدّد شكلها العام، والأجزاء المقطوعة مع المحورَين، وإحداثيات رأس المنحنى، ومحور

الأهداف التعليمية تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

نتيجة ١

س^{٢} + ٢دس = (س + د)^{٢} − د^{٢} ، س^{٢} − ٢دس = (س − د)^{٢} − د^{٢}

نتيجة: تم إدراجها في إطارات تحتوي على ملخص لأهم الطرق والحقائق والصيغ.

الصيغة التربيعية
Quadratic formula

المفردات الأساسية هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

استكشف ١

سُئل نوّاف أن يحلّ المتباينة $\frac{٢س - ٤}{س} \leqslant ٧$

فعرض الحل الآتي:

اضرب طرفَي المتباينة في س: ٢س − ٤ ⩽ ٧س

اطرح ٢س من كلا الطرفَين: −٤ ⩽ ٥س

اقسم الطرفَين على ٥: $س \geqslant -\frac{٤}{٥}$

جرّب خالد أن يتأكّد ما إذا كان س = −١ يحقّق المتباينة الأصلية، فكتب:

عندما س = −١: (٢(−١) − ٤) ÷ (−١) = ٦

وعليه، فإنّ س = −١ هي قيمة لـ س لا تحقّق المتباينة الأصلية.

أستكشف تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الحادية عشرة	تحلّ معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.	١) حلّ: أ) س^{٢} + س − ١٢ = ٠ ب) س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠ ج) ٣س^{٢} − ١٧س = ٦
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحلّ متباينات خطّية.	٢) حلّ: أ) ٥س − ٨ > ٢ ب) ٣ − ٢س ⩾ ٧
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحلّ معادلات خطيّة آنيّة.	٣) حلّ: أ) ٢س + ٣ص = ١٣ ٧س − ٥ص = −١ ب) ٢س − ٧ص = ٣١

المفردات

الإكمال إلى مُربّع
completing the square

نقطة القيمة الصغرى
minimum point

نقطة القيمة العظمى
maximum point

نقطة الثبات
stationary point

نقطة التحوّل
turning point

الجذور roots

المميّز discriminant

معرفة قبلية تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

مثال ٢

اكتب العبارة الجبرية ٢س^{٢} − ١٢س + ٣ في صورة ل(س − ك)^{٢} + ر، حيث ل، ك، ر أعداد ثابتة.

الحل:

الطريقة (١)

٢س^{٢} − ١٢س + ٣ = ٢(س^{٢} − ٦س) + ٣ ..... خذ ٢ كعامل مشترك من الحدين.

−٦ ÷ ٢ = −٣

س^{٢} − ٦س = (س − ٣)^{٢} − ٣^{٢} ..... أكمل المربع لـ (س^{٢} −٦س)

٢[(س − ٣)^{٢} − ٩] + ٣

٢(س − ٣)^{٢} − ١٨ + ٣

٢(س − ٣)^{٢} − ١٥

إذًا ل = ٢، ك = −٣، ر = −١٥

هناك طريقة بديلة أيضًا:

أمثلة تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن خطوات الحل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

مُساعَدة

عندما أ^{٢} تساوي عددًا موجبًا، فإن أ يكون لها قيمتان: إحداهما موجبة والأخرى سالبة.

لاحقًا

تستخدم خصائص مفكوك ذات الحدَّين في نظرية الاحتمالات التي سوف تدرسها لاحقًا في الفصل الثاني من هذا الصف.

مساعدة: تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

هل تعلم؟

أن أول شخص قدّم الأعداد العشرية غير المنتهية هو سيمون ستيفن Simon Stevin سنة ١٥٨٥م. كان رياضيًّا مهمًا، وهو من جعل استخدام الأعداد العشرية أكثر عمومية في كتابه الذي أسماه 'الأعشار' 'De Thiende'.

هل تعلم؟ تحتوي على حقائق مثيرة للاهتمام تظهر كيف ترتبط الرياضيات بالعالم الأوسع.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

يمكن حلّ المعادلات التربيعية بالطرق الآتية:

- الإكمال إلى مُربّع.
- استخدام الصيغة التربيعية س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

حلّ المعادلات الآنيّة (معادلة خطيّة ومعادلة تربيعية)

- أعِد ترتيب حدود المعادلة حيث تكتب س بدلالة ص أو ص بدلالة س
- عوِّض عن س أو ص في المعادلة التربيعية ثمّ حلَّ المعادلة الناتجة منها.

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

لاحقًا مربعات توجهك إلى مراجعة المكتسبات ذات الصلة. تشير **سابقًا** إلى التعلم السابق في حال احتجت إلى مراجعة موضوع ما. بينما تشير **لاحقًا** إلى الموضوعات التي ستغطيها في مرحلة لاحقة، في حال رغبت في توسيع معلوماتك.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس، وقد تم ترميزها بنجمة صفراء.
- يجب ألّا تستخدم الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى

١) i) اكتب ٩س^{٢} − ١٥س في صورة (٣س − أ)^{٢} − ب

ب) أوجِد قيم س التي تحقّق المتباينة ٩س^{٢} − ١٥س < ٦

٢) أوجِد جذور المعادلة $\frac{٣٦}{س^{٢}} + ٤ = \frac{٢٥}{س^{٢}}$

٣) أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ك س − ٣ مع منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٩س في نقطتَين مختلفتَين.

الوحدة الأولى

المعادلات والمتباينات والدوالّ التربيعية

Equations, Inequalities, and Quadratic Functions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تكتب المعادلة التربيعية ص = أس^{٢} + ب س + جـ (بحيث يكون أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠) بصيغة الإكمال إلى مربّع.

١-٢ تستخدم صيغة الإكمال إلى مربّع لتحدّد رأس المنحنى التربيعي، وتعرف ما إذا كانت القيمة عظمى أو صغرى.

١-٣ تجد المميّز وتستخدمه لتجد عدد الجذور في المعادلة التربيعية.

١-٤ تحلّ المعادلات التربيعية بمجهول واحد باستخدام الصيغة التربيعية.

١-٥ تحلّ معادلتَين إحداهما تربيعية والأخرى خطيّة آنيًّا.

١-٦ تحلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا، باستخدام التعويض ص = د(س) لتشكّل معادلة تربيعية وتحلّها.

١-٧ تحلّ متباينات تربيعية بمجهول واحد باستخدام طريقة التحليل إلى عوامل، الإكمال إلى مربّع، أو الصيغة التربيعية.

١-٨ تجد نقاط التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية.

١-٩ ترسم المنحنى لدالّة تربيعية، وتحدّد شكلها العام، والأجزاء المقطوعة مع المحورَين، وإحداثيات رأس المنحنى، ومحور التماثل.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الحادية عشرة	تحلّ معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.	١) حلّ: أ) $س^{٢} + س - ١٢ = ٠$ ب) $س^{٢} - ٦س + ٩ = ٠$ ج) $٣س^{٢} - ١٧س = ٦$
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحلّ متباينات خطّية.	٢) حلّ: أ) $٥س - ٨ > ٢$ ب) $٣ - ٢س \geq ٧$
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحلّ معادلات خطيّة آنيّة.	٣) حلّ: أ) $٢س + ٣ص = ١٣$ $٧س - ٥ص = -١$ ب) $٢س - ٧ص = ٣١$ $٣س - ٥ص = ١٩$

المفردات

الإكمال إلى مُربّع
completing the square

نقطة القيمة الصغرى
minimum point

نقطة القيمة العظمى
maximum point

نقطة الثبات
stationary point

نقطة التحوّل
turning point

الجذور roots

المميّز discriminant

الصيغة التربيعية
quadratic formula

لماذا ندرس المعادلات والمتباينات والدوالّ التربيعية؟

تكون الدوالّ التربيعية في صورة ص = أس^{٢} + ب س + جـ (حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠) ولها قيمة عظمى أو قيمة صغرى، ولمنحناها محور تماثل. تؤمّن دراسة الدوالّ التربيعية طريقًا للتفكير بدوالّ أكثر تعقيدًا مثل ص = $٧س^{٥} - ٤س^{٤} + س^{٢} + س + ٣$

رسمت سابقًا منحنيات لدوالّ تربيعية مثل ص = $١٠س^{٢}$ في الصف التاسع (الوحدة الرابعة عشر).

إن الدوالّ التربيعية مجموعة مهمة من الدوالّ التي يمكن استخدامها لتمثيل مجموعة متنوعة من الظواهر الحياتية مثل مسار الكرة عند رميها، ومسار المياه في نافورة المياه، ومجموعة متنوعة من التطبيقات في الأعمال التجارية.

سبق أن تعلّمت كيف تستخدم طريقة التحليل إلى عوامل لحلّ معادلة تربيعية تحتاج إلى إعادة ترتيبها بحيث تكون في صيغة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

١-١ الإكمال إلى مُربّع

١-١أ كتابة العبارة الجبرية بطريقة الإكمال الى مُربّع

تهدف طريقة **الإكمال إلى مُربّع completing the square** إلى إعادة كتابة العبارة الجبرية التربيعية بحيث يظهر المتغيّر مرّة واحدة فقط ويصبح التعامل معها أسهل.

إذا فككنا العبارتَين الجبريتَين $(س + د)^{٢}$، $(س - د)^{٢}$، سنحصل على النتائج الآتية:

$$(س + د)^{٢} = س^{٢} + ٢دس + د^{٢} \quad ، \quad (س - د)^{٢} = س^{٢} - ٢دس + د^{٢}$$

إنّ إعادة ترتيب العبارات الجبرية يعطي النتائج الآتية:

نتيجة ١

$$س^{٢} + ٢دس = (س + د)^{٢} - د^{٢} \quad ، \quad س^{٢} - ٢دس = (س - د)^{٢} - د^{٢}$$

١- لإكمال مُربّع العبارة الجبرية $س^{٢} + ١٠س$، يمكننا استخدام النتيجة (١) أعلاه على النحو الآتي:

$١٠ \div ٢ = ٥$

$$س^{٢} + ١٠س = (س + ٥)^{٢} - ٥^{٢}$$

$$س^{٢} + ١٠س = (س + ٥)^{٢} - ٢٥$$

٢- لإكمال مُربّع العبارة الجبرية $س^{٢} + ٨س - ٧$، نستخدم مرة أخرى النتيجة (١) عند تطبيقها على جزء العبارة الجبرية $س^{٢} + ٨س$ على النحو:

$٨ \div ٢ = ٤$

$$س^{٢} + ٨س - ٧ = (س + ٤)^{٢} - ٤^{٢} - ٧$$

$$س^{٢} + ٨س - ٧ = (س + ٤)^{٢} - ٢٣$$

٣- لإكمال مُربّع العبارة الجبرية $٢س^{٢} - ٨س + ٥$،

يجب أولًا أخذ العدد ٢ كعامل مشترك بين أول حدَّين، فيكون:

$$٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٢(س^{٢} - ٤س) + ٥$$

$-٤ \div ٢ = -٢$

$س^{٢} - ٤س = (س - ٢)^{٢} - ٢^{٢}$، مما يعطي:

$$٢س^{٢} - ٨س + ٥ = ٢[(س - ٢)^{٢} - ٤] + ٥ = ٢(س - ٢)^{٢} - ٣$$

مثـــال ١

أكمل مُربّع العبارة الجبرية ٥س^{٢} + ٢٠س + ٥٥

الحـــلّ:

٥س^{٢} + ٢٠س + ٥٥ = ٥(س^{٢} + ٤س) + ٥٥ ..... خُذ العدد ٥ كعامل مشترك.

٤ ÷ ٢ = ٢

س^{٢} + ٤س = (س + ٢)^{٢} − ٢^{٢}، مما يعطي ..... أكمل المربع.

٥س^{٢} + ٢٠س + ٥٥ = ٥[(س + ٢)^{٢} − ٤] + ٥٥ = ٥(س + ٢)^{٢} + ٣٥ ..... بسّط، واكتب الناتج.

مثـــال ٢

اكتب العبارة الجبرية ٢س^{٢} − ١٢س + ٣ في صورة ل(س − ك)^{٢} + ر، حيث ل، ك، ر أعداد ثابتة.

الحـــلّ:

الطريقة (١)

٢س^{٢} − ١٢س + ٣ = ٢(س^{٢} − ٦س) + ٣ ..... خذ ٢ كعامل مشترك من الحدين.

−٦ ÷ ٢ = ٣

س^{٢} − ٦س = (س − ٣)^{٢} − ٣^{٢} ..... أكمل المربع لـ (س^{٢} −٦س)

٢[(س − ٣)^{٢} − ٩] + ٣

٢(س − ٣)^{٢} − ١٨ + ٣

٢(س − ٣)^{٢} − ١٥

∴ ل = ٢، ك = ٣، ر = −١٥

يمكننا أيضًا استخدام الطريقة البديلة الآتية لمقارنة المعاملات:

الطريقة (٢)

٢س^{٢} − ١٢س + ٣ = ل(س − ك)^{٢} + ر ..... فكّ الأقواس وبسّط الناتج.

٢س^{٢} − ١٢س + ٣ = ل س^{٢} − ٢ل ك س + ل ك^{٢} + ر ..... قارن معاملات س^{٢} ومعاملات س والأعداد الثابتة.

٢ = ل... (١) −١٢ = −٢ل ك... (٢) ٣ = ل ك^{٢} + ر... (٣)

عند تعويض ل = ٢ في المعادلة (٢) نجد أن قيمة ك = ٣ ..... عوض عن قيمة ل لتجد قيمة ك

عند تعويض ل = ٢، ك = ٣ في المعادلة (٣) نجد أن قيمة ر = −١٥ ..... عوض عن قيمة ل، ك لتجد قيمة ر

٢س^{٢} − ١٢س + ٣ = ٢(س − ٣)^{٢} − ١٥ ..... أكتب الناتج.

مثـــال ٣

اكتب ٤س^{٢} + ٢٠س + ٥ في صورة (أس + ب)^{٢} + جـ، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة يجب إيجادها.

الحـــلّ:

٤س^{٢} + ٢٠س + ٥ = (أس + ب)^{٢} + جـ ..... فكّ الأقواس وبسّط الناتج.

٤س^{٢} + ٢٠س + ٥ = أ^{٢}س^{٢} + ٢أ ب س + ب^{٢} + جـ

قارن معاملات س^{٢} في المعادلات ومعاملات س، والأعداد الثابتة.

٤ = أ^{٢} ..... (١) ٢٠ = ٢أب..... (٢) ٥ = ب^{٢} + جـ..... (٣)

من المعادلة (١) نجد أن أ = ± ٢

عند التعويض عن أ = ٢ في المعادلة (٢)

نجد أن ب = ٥ ..... عوّض عن قيمة أ لتجد قيمة ب

عند التعويض عن ب = ٥ في المعادلة (٣)

نجد أن جـ = −٢٠ ..... عوّض عن قيمة ب لتجد قيمة جـ

∴ ٤س^{٢} + ٢٠س + ٥ = (٢س + ٥)^{٢} − ٢٠ ..... اكتب الناتج.

عند التعويض عن أ = −٢ في المعادلة (٢)

نجد أن ب = −٥ ..... عوّض عن قيمة أ لتجد قيمة ب

عند التعويض عن ب = −٥ في المعادلة (٣)

نجد أن جـ = −٢٠ ..... عوّض عن قيمة ب لتجد قيمة جـ

∴ ٤س^{٢} + ٢٠س + ٥ = (−٢س − ٥)^{٢} − ٢٠

= (٢س + ٥)^{٢} − ٢٠ ..... اكتب الناتج.

مُساعَدة

عندما أ^{٢} تساوي عددًا موجبًا، فإن أ يكون لها قيمتان: إحداهما موجبة والأخرى سالبة.

تمارين ١-١أ

١) اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة (س + أ)^{٢} + ب:

أ) س^{٢} − ٦س
ب) س^{٢} + ٨س
ج) س^{٢} − ٣س
د) س^{٢} + ١٥س
هـ) س^{٢} + ٤س + ٨
و) س^{٢} − ٤س − ٨
ز) س^{٢} + ٧س + ١
ح) س^{٢} − ٣س + ٤

٢) اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ:

أ) ٢س^{٢} − ١٢س + ١٩
ب) ٣س^{٢} − ١٢س − ١
ج) ٢س^{٢} + ٥س − ١
د) ٢س^{٢} + ٧س + ٥

٣) اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة أ − (س + ب)^{٢}:

أ) ٤س − س^{٢}
ب) ٨س − س^{٢}
ج) ٤ − ٣س − س^{٢}
د) ٩ + ٥س − س^{٢}

٤) اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة ل − ك(س + ر)^{٢}:

أ) ٧ − ٨س − ٢س^{٢}
ب) ٣ − ١٢س − ٢س^{٢}
ج) ١٣ + ٤س − ٢س^{٢}
د) ٢ + ٥س − ٣س^{٢}

٥) اكتب كلّ عبارة من العبارات الجبرية الآتية في صورة (أس + ب)^{٢} + جـ:

أ) ٩س^{٢} − ٦س − ٣
ب) ٤س^{٢} + ٢٠س + ٣٠
ج) ٢٥س^{٢} + ٤٠س − ٤
د) ٩س^{٢} − ٤٢س + ٦١

١-١ ب استخدام الإكمال إلى مُربّع لحلّ المعادلات التربيعية

مثـال ٤

استخدم الإكمال إلى مُربّع لتحلّ المعادلة $\frac{٥}{س + ٢} + \frac{٣}{س - ٥} = ١$، حيث $س \neq -٢$، $س \neq ٥$

اكتب الناتج في أبسط صورة.

الحـلّ:

$\frac{٥(س - ٥)}{س + ٢} + \frac{٣(س - ٥)}{س - ٥} = ١ \times (س - ٥)$ ... اضرب طرفي المعادلة بـ (س − ٥) وبسط الكسر.

$\frac{٥(س - ٥)(س + ٢)}{س + ٢} + ٣(س + ٢) = ١ \times (س - ٥)(س + ٢)$ ... اضرب طرفي المعادلة بـ (س + ٢) وبسط الكسر.

$٥(س - ٥) + ٣(س + ٢) = (س - ٥)(س + ٢)$

$٥س - ٢٥ + ٣س + ٦ = س^{٢} - ٥س + ٢س - ١٠$ ... فكّ وبسّط.

$س^{٢} - ١١س + ٩ = ٠$

$(س - \frac{١١}{٢})^{٢} - (\frac{١١}{٢})^{٢} + ٩ = ٠$ ... أكمل المُربّع.

$(س - \frac{١١}{٢})^{٢} - \frac{١٢١}{٤} + \frac{٣٦}{٤} = ٠$ ... بسّط.

$(س - \frac{١١}{٢})^{٢} - \frac{٨٥}{٤} = ٠$

$(س - \frac{١١}{٢})^{٢} = \frac{٨٥}{٤}$ ... حل المعادلة.

$س - \frac{١١}{٢} = \pm \sqrt{\frac{٨٥}{٤}}$ ... خذ الجذرين التربيعيين.

$س = \frac{١١}{٢} \pm \frac{\sqrt{٨٥}}{٢}$ ... بسّط.

$س = \frac{١}{٢}(١١ \pm \sqrt{٨٥})$

تمارين ١-١ب

١) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام الإكمال إلى مُربّع:

أ) $س^{٢} + ٨س - ٩ = ٠$ ب) $س^{٢} + ٤س - ١٢ = ٠$ ج) $س^{٢} - ٢س - ٣٥ = ٠$

د) $س^{٢} - ٩س + ١٤ = ٠$ هـ) $س^{٢} + ٣س - ١٨ = ٠$ و) $س^{٢} + ٩س - ١٠ = ٠$

٢) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام الإكمال إلى مُربّع. اكتب الناتج في أبسط صورة:

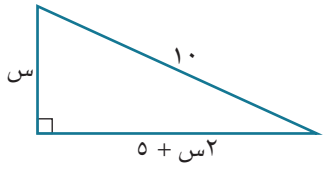
أ) $س^{٢} + ٤س - ٧ = ٠$ ب) $س^{٢} - ١٠س + ٢ = ٠$ ج) $س^{٢} + ٨س - ١ = ٠$

د) $٢س^{٢} - ٤س - ٥ = ٠$ هـ) $٢س^{٢} + ٦س + ٣ = ٠$ و) $٢س^{٢} - ٨س - ٣ = ٠$

٣) حلَّ المعادلة $\frac{٥}{س + ٢} + \frac{٣}{س - ٤} = ٢$ واكتب الناتج في أبسط صورة.

٤) يبيّن الشكل المجاور مثلّثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه (س) سم، (٢س + ٥) سم، ١٠ سم.

أوجد قيمة س. اكتب الناتج في أبسط صورة.



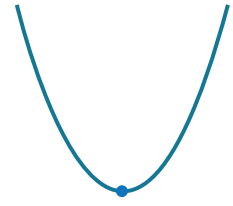
٥) أوجد الحلول الحقيقية للمعادلة $(٣س^{٢} + ٥س - ٧)^{٤} = ١$

١-٢ التمثيل البياني للدالّة التربيعية

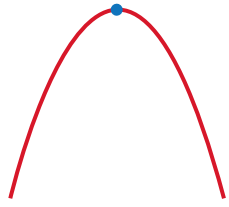
الصورة العامّة للدالّة التربيعية هي د (س) = أس^{٢} + ب س + جـ، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠

شكل منحنى الدالّة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ مهمًا ويحتوي دائمًا على محور تماثل رأسي.

يعتمد وضع المنحنى التربيعي على قيمة أ، (أي معامل س^{٢})

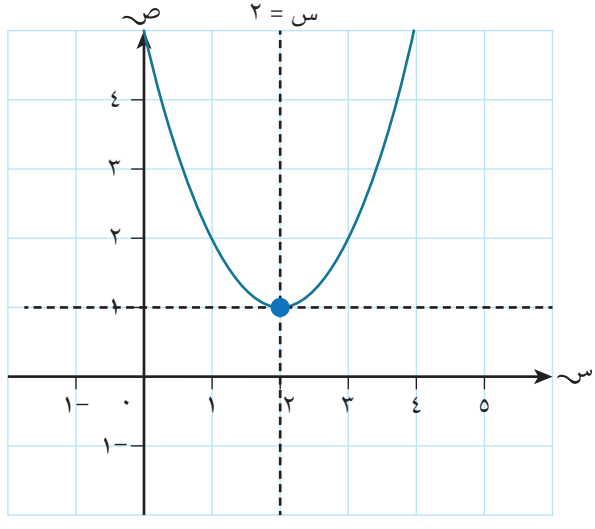


إذا كان أ > ٠ يكون لمنحنى الدالّة **قيمة صغرى minimum point** وتكون أسفل نقطة في المنحنى.



إذا كان أ < ٠ يكون لمنحنى الدالّة **قيمة عظمى maximum point** وتكون أعلى نقطة في المنحنى.

تسمى نقطة التحوّل أو نقطة الثبات بنقطة رأس المنحنى



لكلّ منحنى تربيعي محور تماثل يمرّ بنقطة رأس المنحنى.

سنطوّر في هذا الدرس مهارة مهمّة وهي مهارة 'رسم المنحنى'.

لرسم المنحنى يجب أن تُعرض ميزات الدالّة وسلوكها.

عند رسم منحنى الدالّة التربيعية، يجب الوقوف عند الميزات الآتية:

- الشكل العام للمنحنى.
- الجزء المقطوع من كلّ محور من المحورَين.
- إحداثيات نقطة رأس المنحنى.

قد يطلب إليك في بعض الأسئلة رسم المنحنى التربيعي وتسمية بعض خواصه على الرسم.

مُساعَدة

في الدالّة التربيعية، النقطة التي يكون الميل عندها صفرًا تُسمّى **نقطة الثبات stationary point** أو **نقطة التحوّل turning point**.

مثـال ٥

إذا كانت الدالّة د(س) = س^{٢} − ٣س − ٤ :

أ أوجد نقاط تقاطع منحنى الدالّة ص = د (س) مع المحورَين السيني والصادي.

ب ارسم منحنى الدالّة ص = د(س) وأوجد إحداثيات الرأس.

الحـلّ:

أ ص = س^{٢} − ٣س − ٤

لإيجاد نقاط التقاطع مع المحورَين:

عندما س = ٠، فإنّ ص = −٤ ..... لتجد نقطة التقاطع مع المحور الصادي، اجعل س = ٠

عندما ص = ٠، فإنّ س^{٢} − ٣س − ٤ = ٠ ..... لتجد نقطتي التقاطع مع المحور السيني، اجعل ص = ٠

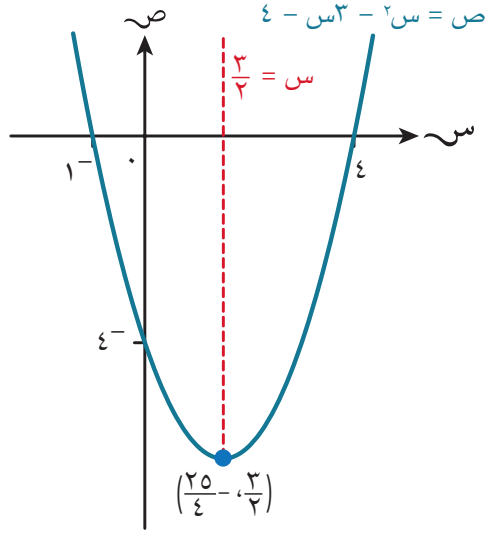
(س + ١)(س − ٤) = ٠

س = −١ أو س = ٤

نقاط التقاطع مع المحورَين هي: (٠، −٤)، (−١، ٠)، (٤، ٠)

ب س = −١ ، س = ٤ ..... يمر محور التماثل في نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتَي المقطع السيني.

ص = س^{٢} − ٣س − ٤



وعليه، تكون معادلة محور التماثل هي س = $\frac{٣}{٢}$

عندما س = $\frac{٣}{٢}$ فإنّ ص = $\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ − ٣$\left(\frac{٣}{٢}\right)$ − ٤

ص = − $\frac{٢٥}{٤}$

وحيث إن أ > ٠ فإنّ شكل المنحنى مفتوح إلى الأعلى

(شكل الحرف اللاتيني U)

النقطة الصغرى هي $\left(\frac{٣}{٢}، -\frac{٢٥}{٤}\right)$

يمكنك أيضًا استخدام طريقة الإكمال إلى مربع لتساعدك على رسم منحنى الدالّة التربيعية.

يعطي الإكمال إلى مُربّع العبارة الجبريّة س^{٢} − ٣س − ٤:

س^{٢} − ٣س − ٤ = $\left(\text{س} - \frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ − ٤

= $\left(\text{س} - \frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \frac{٢٥}{٤}$

الجزء من العبارة الجبريّة $\left(\text{س} - \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ مُربّع كامل، لذا فإنّ أقلّ قيمة يأخذها هي الصفر وتحصل عندما س = $\frac{٣}{٢}$

القيمة الصغرى للعبارة الجبريّة $\left(\text{س} - \frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \frac{٢٥}{٤}$ هي − $\frac{٢٥}{٤}$ وتحصل عندما س = $\frac{٣}{٢}$

وعليه يكون للدالّة د(س) = س^{٢} − ٣س − ٤ قيمة صغرى عند النقطة $\left(\frac{٣}{٢}، - \frac{٢٥}{٤}\right)$

معادلة محور التماثل هي س = $\frac{٣}{٢}$

نتيجة ٢

إذا كُتبت الدالّة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ في صورة أ(س − ل)^{٢} + ك، فإن:

- معادلة محور التماثل هي س = ل = − $\frac{ب}{٢أ}$
- إذا كانت أ < ٠، فإننا نجد قيمة صغرى عند النقطة (ل، ك).
- إذا كانت أ > ٠، فإننا نجد قيمة عظمى عند النقطة (ل، ك).

مثـــال ٦

ارسم منحنى الدالّة ص = ١٦س − ٧ − ٤س^{٢}

الحـــلّ:

بالإكمال إلى مُربّع ينتج أن: (س − ٢)^{٢} مُربّع كامل فيكون (س − ٢)^{٢} ⩾ ٠

١٦س − ٧ − ٤س^{٢} = ٩ − ٤(س − ٢)^{٢}

القيمة العظمى لـ ٩ − ٤(س − ٢)^{٢} هي ٩ تكون أصغر قيمة للمربع الكامل صفرًا، عندما س = ٢

وتحصل عندما س = ٢

وعليه فإنّ للدالّة ص = ١٦س − ٧ − ٤س^{٢}

قيمة عظمى عند النقطة (٢، ٩)

معادلة محور التماثل س = ٢

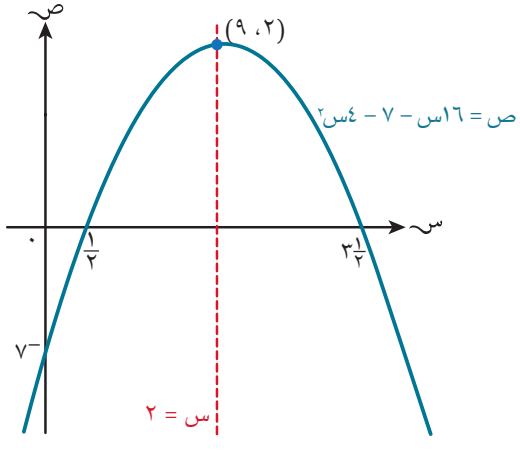
عندما س = ٠، فإنّ ص = − ٧

وعندما ص = ٠، فإنّ ٩ − ٤(س − ٢)^{٢} = ٠

(س − ٢)^{٢} = $\frac{٩}{٤}$

س − ٢ = $\pm\frac{٣}{٢}$

س = ٣$\frac{١}{٢}$ أو س = $\frac{١}{٢}$



تمارين ١-٢

١) استخدم تماثل كلّ دالّة من الدوالّ التربيعية الآتية لتجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى. ارسم منحنى كل دالّة مبيّنًا جميع نقاط التقاطع مع المحورَين:

أ) ص = س^{٢} − ٦س + ٨ ب) ص = س^{٢} + ٥س − ١٤

ج) ص = ٢س^{٢} + ٧س − ١٥ د) ص = ١٢ + س − س^{٢}

٢) أ) اكتب ٢س^{٢} − ٨س + ٥ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ، حيث أ، ب، جـ أعداد صحيحة.

ب) اكتب معادلة محور التماثل لمنحنى الدالّة ص = ٢س^{٢} − ٨س + ٥

٣) أ) اكتب ٧ + ٥س − س^{٢} في صورة أ − (س + ب)^{٢}، حيث أ، ب عددان ثابتان.

ب) أوجد إحداثيات نقطة رأس منحنى الدالّة ص = ٧ + ٥س − س^{٢} وحدد ما إذا كانت قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

٤) أ) اكتب ٢س^{٢} + ٩س + ٤ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة.

ب) أوجد إحداثيات نقطة رأس منحنى الدالّة ص = ٢س^{٢} + ٩س + ٤ وحدّد ما إذا كانت قيمة عظمى أو قيمة صغرى.

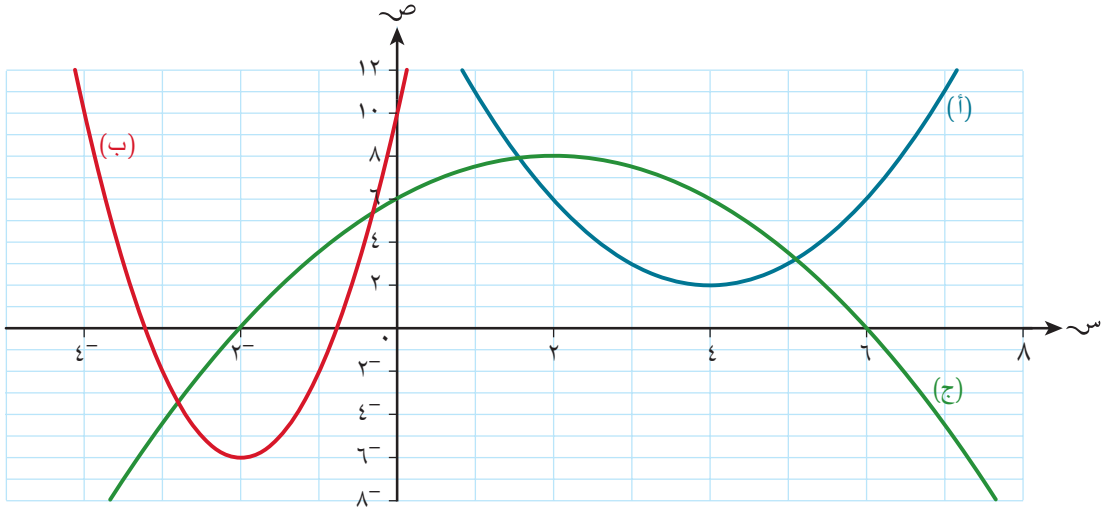
٥) أوجد القيمة الصغرى للعبارة الجبرية س^{٢} − ٧س + ٨ وقيمة س المناظرة لها.

٦) أ) اكتب العبارة الجبريّة ١ + س − ٢س^{٢} في صورة ل − ٢(س − ك)^{٢}

ب) ارسم منحنى الدالّة ص = ١ + س − ٢س^{٢}

٧) بيّن أنّ منحنى الدالّة ص = ٤س^{٢} + ٢س + ٥ لا يقطع محور السينات.

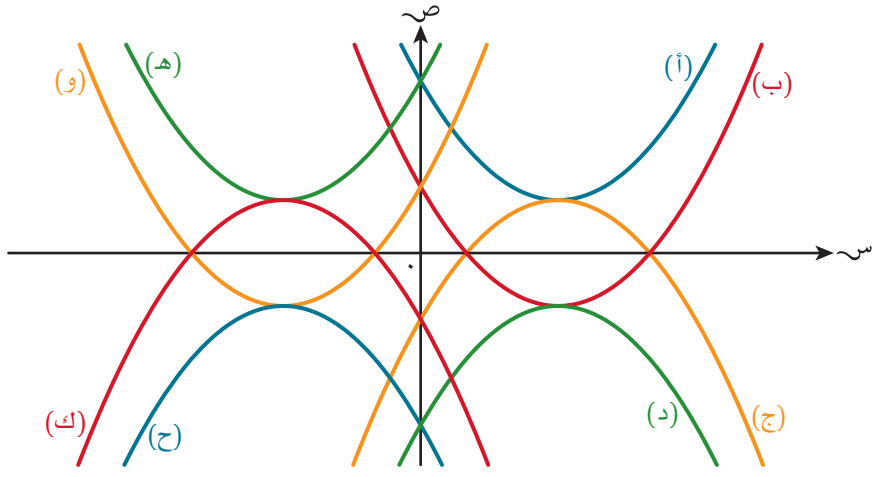
★ **٨)** اكتب معادلة كلّ دالّة من الدوالّ التي منحنياتها (أ)، (ب)، (ج).



٩) يبيّن الشكل أدناه ثمانية منحنيات لدوالّ تربيعية.

معادلتا منحنيان من المنحنيات الثمانية هي ص = س^{٢} − ٦س + ١٣، ص = −س^{٢} − ٦س − ٥

حدّد أسماء هذَين المنحنيَين التربيعيَّين وأَوجد معادلة كلّ منحنى من المنحنيات التربيعية الأخرى.



١٠) إذا علمت أن إحداثيات رأس منحنى دالّة تربيعية (ك، ل)، فبيّن أن معادلة المنحنى هي ص = أس^{٢} − ٢أ ك س + أ ك^{٢} + ل حيث أ ≠ ٠. شارحًا السبب.

١-٣ جذور المعادلة التربيعية

إذا كانت د (س) دالّة، نسمّي حلول المعادلة د(س) = ٠ **جذور الدالّة د (س)** **roots**.

إليك حلّ ثلاث معادلات تربيعية في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

باستخدام الصيغة س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

س^{٢} + ٢س − ٨ = ٠ س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٢^{٢} - ٤ \times ١ \times (-٨)}}{٢ \times ١}$ = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٣٦}}{٢}$ س = ٢ أو س = -٤	س^{٢} + ٦س + ٩ = ٠ س = $\frac{-٦ \pm \sqrt{٦^{٢} - ٤ \times ١ \times ٩}}{٢ \times ١}$ = $\frac{-٦ \pm \sqrt{٠}}{٢}$ س = -٣ أو س = -٣	س^{٢} + ٢س + ٦ = ٠ س = $\frac{-٢ \pm \sqrt{٢^{٢} - ٤ \times ١ \times ٦}}{٢ \times ١}$ = $\frac{-٢ \pm \sqrt{-٢٠}}{٢}$ لا يوجد جذر حقيقي
$\sqrt{٣٦} > ٠$ لذا يوجد جذران حقيقيان مختلفان.	يوجد جذر حقيقي واحد، لكننا غالبًا نقول إنه يوجد جذران حقيقيان متساويان.	$\sqrt{-٢٠}$ ليس عددًا حقيقيًا، لذا لا توجد جذور حقيقية.

مُساعَدة

تذكّر أهمية الجزء المتعلق بالرمز $\pm\sqrt{\ }$ في الصيغة.

يسمّى الجزء الموجود تحت الجذر التربيعي في الصيغة التربيعية **المميّز** **discriminant**.

نتيجة ٣

ب^{٢} − ٤أجـ هو مميّز المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

تخبرنا إشارة المميّز (موجبة كانت أو صفرًا أو سالبة) عن عدد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية.

ب^{٢} − ٤أجـ	نوع الجذور
٠ <	جذران حقيقيان مختلفان.
٠ =	جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر).
٠ >	لا توجد جذور حقيقية.

مثـال ٧

إذا كانت س^{٢} + ٥س − ٧ = ٠، فأوجد:

أ مميّز المعادلة.

ب عدد جذور المعادلة.

الحـلّ:

أ المميّز = ب^{٢} − ٤أجـ ..... عوّض عن أ = ١، ب = ٥، جـ = -٧

= ٥^{٢} − ٤ × ١ × (-٧)

= ٥٣

ب بما أن المميّز ٥٣ > ٠، فإنه يوجد جذران حقيقيان مختلفان للمعادلة.

مثـــال ٨

أوجِد قيم ك إذا كان للمعادلة ٤س^{٢} + ك س + ١ = ٠ جذران متساويان.

الحـــلّ:

∵ الجذرَين متساويان فإن ب^{٢} − ٤أجـ = ٠ ..... عوّض عن قيم أ، ب، جـ

ك^{٢} − ٤ × ٤ × ١ = ٠

ك^{٢} = ١٦ ..... حلّ المعادلة.

ك = −٤ أو ك = ٤

تمارين ١-٣

١) أوجِد مميّز كلّ معادلة من المعادلات الآتية، محدّدًا ما إذا كان للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان، أو جذران حقيقيان متساويان، أو لا جذور حقيقية لها:

أ) س^{٢} − ١٢س + ٣٦ = ٠ ب) س^{٢} + ٥س − ٣٦ = ٠ ج) س^{٢} + ٩س + ٢ = ٠

د) ٤س^{٢} − ٤س + ١ = ٠ هـ) ٢س^{٢} − ٧س + ٨ = ٠ و) ٣س^{٢} + ١٠س − ٢ = ٠

٢) استخدِم المميّز لتحدّد عدد جذور المعادلة: ٢ − ٥س = $\frac{٤}{س}$.

٣) أوجد قيَم ك إذا كان للمعادلة س^{٢} − ٥س + ٩ = ك(٥ − س) جذران متساويان.

٤) أوجِد قيمة ك في كلّ معادلة من المعادلات الآتية علمًا بأنّ لكلّ منها جذرَين حقيقيَّين متساويَين:

أ) س^{٢} + ك س + ٤ = ٠ ب) ٤س^{٢} + ٤(ك − ٢)س + ك = ٠

ج) (ك + ٢)س^{٢} + ٤ك = (٤ك + ٢)س د) س^{٢} − ٢س + ١ = ٢ك(ك − ٢)

هـ) (ك + ١)س^{٢} + ك س − ٢ك = ٠ و) ٤س^{٢} − (ك − ٢)س + ٩ = ٠

٥) للمعادلة ك س^{٢} + ل س + ٥ = ٠ جذر حقيقي مكرّر. أوجِد قيمة ك بدلالة ل.

٤-١ الصيغة التربيعية

يُمكن حلّ المعادلة التربيعية باستخدام **الصيغة التربيعية** Quadratic formula.

إذا كانت أس^{٢} + ب س + جـ = ٠، حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠ فإنّ:

نتيجة ٤

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$$

يُمكن إثبات هذه الصيغة التربيعية باستخدام الإكمال إلى مُربّع للمعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠:

أس^{٢} + ب س + جـ = ٠	
$س^{٢} + \frac{ب س}{أ} + \frac{جـ}{أ} = ٠$	اقسم طرفَي المعادلة على أ
$(س + \frac{ب}{٢أ})^{٢} - (\frac{ب}{٢أ})^{٢} + (\frac{جـ}{أ}) = ٠$	أكمل المُربّع.
$(س + \frac{ب}{٢أ})^{٢} = \frac{ب^{٢}}{٤أ^{٢}} - \frac{جـ}{أ}$	أعد ترتيب المعادلة.
$(س + \frac{ب}{٢أ})^{٢} = \frac{ب^{٢} - ٤أجـ}{٤أ^{٢}}$	وحّد المقامات في الطرف الأيسر.
$س + \frac{ب}{٢أ} = \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$	أوجد الجذر التربيعي لطرفَي المعادلة.
$س = -\frac{ب}{٢أ} \pm \frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$	اطرح $\frac{ب}{٢أ}$ من كلا الطرفَين.
$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$	جمّع حدود الطرف الأيسر.

مُساعَدة

تذكّر أهمية رمز ± قبل $\sqrt{}$ في الصيغة.

يجب أن تكون قادرًا على حل المعادلات باستخدام الصيغة التربيعية مباشرة من دون برهنتها.

مثـال ٩

حلَّ المعادلة ٦س^{٢} − ٣س − ٢ = ٠ باستخدام الصيغة التربيعية مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

الحـلّ:

$$س = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{(-٣)^{٢} - ٤ \times ٦ \times (-٢)}}{٢ \times ٦}$$ عوّض في الصيغة التربيعية عن أ = ٦، ب = −٣، جـ = −٢

$$س = \frac{٣ + \sqrt{٥٧}}{١٢} \quad أو \quad س = \frac{٣ - \sqrt{٥٧}}{١٢}$$ بسّط.

س = ٠,٨٧٩ أو س = −٠,٣٧٩ قرّب إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

مُساعَدة

انتبه إلى القيم السالبة للأعداد أ، ب، جـ. يمكنك استخدام الأقواس لأنها تسهل العمليات الحسابية.

تمارين ١-٤

١) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام الصيغة التربيعية، مقرّبًا الناتج إلى أقرب منزلتَين عشريتَين:

أ) $س^{٢} - ١٠س - ٣ = ٠$

ب) $س^{٢} + ٦س + ٤ = ٠$

ج) $س^{٢} + ٣س - ٥ = ٠$

د) $٢س^{٢} + ٥س - ٦ = ٠$

هـ) $٤س^{٢} + ٧س + ٢ = ٠$

و) $٥س^{٢} + ٧س - ٢ = ٠$

٢) مستطيل أطوال أضلاعه (س) سم، (٣س − ٢) سم ومساحته ٦٣ سم^{٢}. أوجد قيمة س مقربًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

٣) المثلّث (أ) طول قاعدته (س) سم وارتفاعه (٢س − ٢) سم، والمثلّث (ب) طول قاعدته (س + ١) سم وارتفاعه (٥ − س) سم. إذا علمت أن مساحة المثلث (أ) تساوي مساحة المثلث (ب). فأوجد قيمة س مقرّبًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

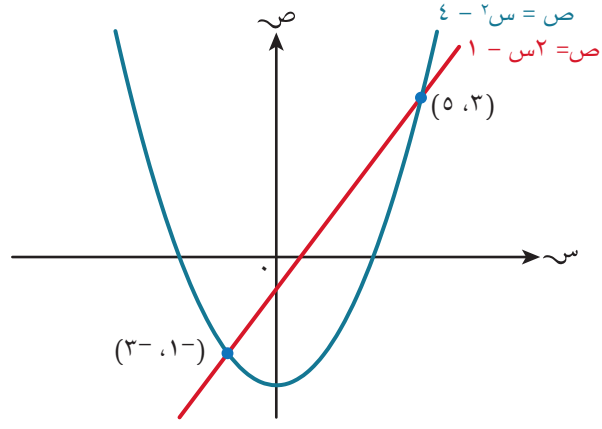
٤) حلَّ المعادلة $\frac{٥}{س - ٣} + \frac{٢}{س + ١} = ١$ مقربًا الناتج إلى أقرب عدد مكوّن من ٣ أرقام معنوية.

٥) حلَّ المعادلة التربيعية $أس^{٢} - ب س + جـ = ٠$ واكتب النواتج بدلالة أ، ب، جـ

ما العلاقة القائمة بين حلول هذه المعادلة وحلول المعادلة $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$؟

١-٥ حلّ المعادلات الآنيّة (معادلة خطّية ومعادلة تربيعية)

سوف نتعلّم في هذا الدرس كيف نحلّ معادلتَين آنيتَين إحداهما خطّية والأخرى تربيعية.



يُبيّن الشكل أعلاه منحنى الدالّة ص = س٢ – ٤، والمستقيم ص = ٢س – ١

إحداثيات نقطتَي التقاطُع هما (–١، –٣)، (٣، ٥)

هذا يعني أن س = –١، ص = –٣ و س = ٣، ص = ٥ حلول للمعادلتَين الآنيتَين

ص = س٢ – ٤، ص = ٢س – ١

يُمكن أيضًا إيجاد الحلول جبريًّا:

ص = س٢ – ٤ ..... (١)

ص = ٢س – ١ ..... (٢)

عوّض عن ص من المعادلة (٢) في المعادلة (١)

٢س – ١ = س٢ – ٤ أعد ترتيب المعادلة.

س٢ – ٢س – ٣ = ٠ حلّل إلى العوامل.

(س + ١)(س – ٣) = ٠

س = –١ أو س = ٣

عوّض عن س = –١ في المعادلة (٢) للحصول على ص = –٢ – ١ = –٣

عوّض عن س = ٣ في المعادلة (٢) للحصول على ص = ٦ – ١ = ٥

الحلول هي: س = –١، ص = –٣ و س = ٣، ص = ٥

مثـــال ١٠

حلَّ المعادلتَين الآتيتَين آنيًّا:

$٢س + ٢ص = ٧$

$س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٨$

الحـــلّ:

$٢س + ٢ص = ٧$ ..... (١)

$س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٨$ ..... (٢)

من المعادلة (١)، $س = \frac{٧ - ٢ص}{٢}$ ..... عوّض عن س في المعادلة (٢)

$\left(\frac{٧ - ٢ص}{٢}\right)^{٢} - ٤ص^{٢} = ٨$ ..... فُكَّ الأقواس.

$\frac{٤٩ - ٢٨ص + ٤ص^{٢}}{٤} - ٤ص^{٢} = ٨$ ..... اضرب طرفَي المعادلة في ٤

$٤٩ - ٢٨ص + ٤ص^{٢} - ١٦ص^{٢} = ٣٢$ ..... أعد ترتيب الحدود.

$١٢ص^{٢} + ٢٨ص - ١٧ = ٠$ ..... حلّل إلى العوامل.

$(٦ص + ١٧)(٢ص - ١) = ٠$

$ص = -\frac{١٧}{٦}$ أو $ص = \frac{١}{٢}$

عوّض عن ص = $-\frac{١٧}{٦}$ في المعادلة (١) ..... عوض عن قيمة ص لتجد قيمة س

للحصول على $س = \frac{١٩}{٣}$

عوّض عن ص = $\frac{١}{٢}$ في المعادلة (١) ..... عوض عن قيمة ص لتجد قيمة س

للحصول على س = ٣

الحلول هي: $س = \frac{١٩}{٣}$، $ص = -\frac{١٧}{٦}$ و س = ٣، $ص = \frac{١}{٢}$

تمارين ١-٥

١) حلَّ كلّ زوج من أزواج المعادلات الآتية آنيًّا:

أ) ص = ٦ − س
ص = س^{٢}

ب) س + ٤ص = ٦
س^{٢} + ٢س ص = ٨

ج) ٣ص = س + ١٠
س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠

د) ص = ٣س − ١
٨س^{٢} − ٢س ص = ٤

هـ) س − ٢ص = ٦
س^{٢} − ٤س ص = ٢٠

و) ٤س − ٣ص = ٥
س^{٢} + ٣س ص = ١٠

ز) ٢ص − س = ٥
٢س^{٢} − ٣ص^{٢} = ١٥

ح) س + ٢ص = ٦
س^{٢} + ص^{٢} + ٤س ص = ٢٤

ط) ٥س − ٢ص = ٢٣
س^{٢} − ٥س ص + ص^{٢} = ١

ي) ٢س − ص = ١٤
ص^{٢} = ٨س + ٤

ك) ٢س + ٣ص + ١٩ = ٠
٢س^{٢} + ٣ص = ٥

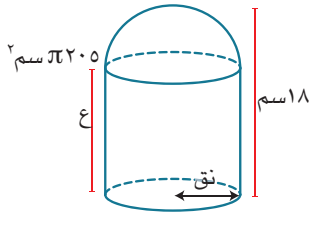
ل) س + ٢ص = ٥
س^{٢} + ص^{٢} = ١٠

م) س − ١٢ص = ٣٠
٢ص^{٢} − س ص = ٢٠

٢) مُربّعان مجموع محيطَيهما ٥٠ سم ومجموع مساحتَيهما ٩٣,٢٥ سم^{٢}
أوجد طول ضلع كلّ مُربّع.

٣) دائرتان مجموع محيطَيهما (٣٦π) سم، ومجموع مساحتَيهما (١٧٠π) سم^{٢}. أوجد نصف قطر كلّ دائرة.

٤) يُبيّن الشكل المجاور مجسَّمًا مكوّنًا من نصف كرة نصف قطرها (نق) سم، وأسطوانة نصف قطر قاعدتها (نق) سم وارتفاعها (ع) سم.
إذا علمت أن ارتفاع المجسّم الكلّي ١٨ سم ومساحته السطحية ٢٠٥π سم^{٢}
فأوجد قيمة نق وقيمة ع



مُساعَدة
المساحة السطحية (م) لأسطوانة نصف قطرها (نق) وارتفاعها (ع) تساوي
م = ٢π نق ع + ٢ π نق^{٢}

٥) يقطع المستقيم ص = ٢ − س المنحنى ٥س^{٢} − ص^{٢} = ٢٠ عند النقطتَين ا ، ب
أوجد إحداثيات النقطتَين ا ، ب

٦) يقطع المستقيم ٢س + ٥ص = ١ المنحنى س^{٢} + ٥ س ص − ٤ص^{٢} + ١٠ = ٠
عند النقطتَين ا ، ب، أوجد إحداثيات النقطتَين ا ، ب

★ ٧) أ) اقسم العدد ١٠ إلى جزأين بحيث يكون الفرق بين مُربّعَيهما ٦٠
ب) اقسم العدد ن إلى جزأين بحيث يكون الفرق بين مُربّعَيهما د

١-٦ حلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا

يُمكن أن يُطلب إليك أن تحلّ معادلة تربيعية بدلالة س

عند حل هذه المعادلات الأكثر تعقيدًا، من المهم الأخذ بالاعتبار عدد الحلول الموجودة، لأن المعادلات الأصلية ليست تربيعية، فقد نجد أن لدينا عددًا غير متوقع من الحلول أو أن بعض الحلول الفعلية مرفوضة.

مثـــال ١١

حلَّ المعادلة $٤س^{٤} - ٣٧س^{٢} + ٩ = ٠$

الحـــلّ:

$٤س^{٤} - ٣٧س^{٢} + ٩ = ٠$ ضع ص = $س^{٢}$

$٤ص^{٢} - ٣٧ص + ٩ = ٠$ حلّل المعادلة التربيعية

$(٤ص - ١)(ص - ٩) = ٠$

ص = $\frac{١}{٤}$ أو ص = ٩ عوض $س^{٢}$ بدلًا من ص

$س^{٢} = \frac{١}{٤}$ أو $س^{٢} = ٩$

س = $\pm\frac{١}{٢}$ أو س = ±٣ لاحظ أن هذه المعادلة لها أربعة حلول وليس حلّين.

مثـــال ١٢

حلَّ المعادلة $س - ٤\sqrt{س} - ١٢ = ٠$

الحـــلّ:

$س - ٤\sqrt{س} - ١٢ = ٠$ ضع ص = $\sqrt{س}$

$ص^{٢} - ٤ص - ١٢ = ٠$

$(ص - ٦)(ص + ٢) = ٠$

ص = ٦ أو ص = -٢ عوّض $\sqrt{س}$ عن ص

$\sqrt{س} = ٦$ أو $\sqrt{س} = -٢$ $\sqrt{س} = -٢$ ليس لها حلّ حقيقي لأنّ $\sqrt{س}$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

∴ س = ٣٦ لاحظ أن هذه المعادلة لها حلّ واحد.

مُساعَدة

من المعلوم أن $\sqrt{س}$ عدد غير سالب.

مثـال ١٣

حلَّ المعادلة $٣(٣^{س})^{٢} - ٢٨(٣^{س}) + ٩ = ٠$

الحـلّ:

$٣(٣^{س})^{٢} - ٢٨(٣^{س}) + ٩ = ٠$ ..... ضع ص = $٣^{س}$

$٣ص^{٢} - ٢٨ص + ٩ = ٠$

$(٣ص - ١)(ص - ٩) = ٠$

ص = $\frac{١}{٣}$ أو ص = ٩ ..... عوّض $٣^{س}$ عن ص

$٣^{س} = \frac{١}{٣}$ أو $٣^{س} = ٩$ ..... $\frac{١}{٣} = ٣^{-١}$ ، $٩ = ٣^{٢}$

س = -١ أو س = ٢

تمارين ١-٦

١) أوجد قيم س الحقيقية التي تحقّق كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ) $س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦ = ٠$

ب) $س^{٦} - ٧س^{٣} - ٨ = ٠$

ج) $س^{٤} - ٦س^{٢} + ٥ = ٠$

د) $٢س^{٤} - ١١س^{٢} + ٥ = ٠$

هـ) $٣س^{٤} + س^{٢} - ٤ = ٠$

و) $٨س^{٦} - ٩س^{٣} + ١ = ٠$

ز) $س^{٤} + ٢س^{٢} - ١٥ = ٠$

ح) $س^{٤} + ٩س^{٢} + ١٤ = ٠$

ط) $س^{٨} - ١٥س^{٤} - ١٦ = ٠$

ي) $٣٢س^{١٠} - ٣١س^{٥} - ١ = ٠$

ك) $\frac{٩}{س^{٤}} + \frac{٥}{س^{٢}} = ٤$

ل) $\frac{٨}{س^{٦}} + \frac{٧}{س^{٣}} = ١$

٢) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ) $٢س - ٩\sqrt{س} + ١٠ = ٠$

ب) $\sqrt{س}(\sqrt{س} + ١) = ٦$

ج) $٦س - ١٧\sqrt{س} + ٥ = ٠$

د) $١٠س + \sqrt{س} - ٢ = ٠$

هـ) $٨س + ٥ = ١٤\sqrt{س}$

و) $٣\sqrt{س} + \frac{٥}{\sqrt{س}} = ١٦$

١-٧ حلّ المتباينات التربيعية

سبق أن تعرّفنا على كيفية حلّ المتباينات الخطيّة.

يبيّن النص الآتي مثالَين على ذلك:

حلّ المتباينة ٢(س + ٧) > −٤

٢س + ١٤ > −٤	فُكّ الأقواس.
٢س > −١٨	اطرح ١٤ من طرفَي المتباينة.
س > −٩	اقسم الطرفَين على ٢

حلّ المتباينة ١١ − ٢س ≤ −٤

−٢س ≤ −١٥	اطرح ١١ من الطرفَين
$س \geq \frac{١٥}{٢}$	اقسم الطرفَين على −٢

استُخدم في المثال الثاني أعلاه النتيجة الآتية:

نتيجة ٥

إذا ضربنا طرفَي المتباينة في عدد سالب، أو قسمناهما على عدد سالب يجب عكس إشارة المتباينة.

يمكن حلّ المتباينات التربيعية برسم منحنى ومعرفة متى يكون المنحنى فوق المحور السيني أو تحته.

مثـال ١٤

حلَّ المتباينة $س^{٢} - ٥س - ١٤ > ٠$

الحـلّ:

أوجد نقاط التقاطع مع المنحنى ..... ارسم منحنى الدالّة ص = $س^{٢}$ − ٥س − ١٤

عندما ص = ٠، فإن $س^{٢} - ٥س - ١٤ = ٠$

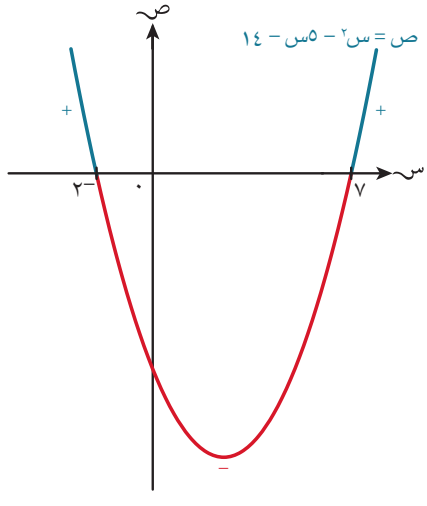
(س + ٢)(س − ٧) = ٠

س = −٢ أو س = ٧

وعليه فإنّ نقاط تقاطع المنحنى مع المحور السيني هي −٢، ٧

بما أن المطلوب إيجاد الحل عندما تكون المتباينة موجبة، يجب أن نجد مدى قيم س التي يكون المنحنى عندها موجبًا (فوق المحور السيني).

الحلّ هو س < −٢ أو س > ٧



مُساعَدة

عند رسم منحنى الدالّة، عليك فقط معرفة اتجاهه إلى الأعلى أو إلى الأسفل ونقاط تقاطعه مع المحور السيني. من غير الضروري إيجاد الرأس أو الجزء المقطوع مع المحور الصادي.

مثـــال ١٥

حلَّ المتباينة ٢س^{٢} + ٣س ⩾ ٢٧

الحـــلّ:

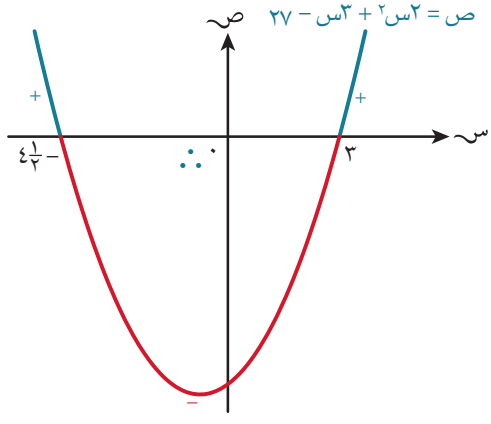
٢س^{٢} + ٣س − ٢٧ ⩾ ٠ ..... أعد ترتيب الحدود.

ارسم منحنى الدالّة ص = ٢س^{٢} + ٣س − ٢٧

عندما ص = ٠، فإن ٢س^{٢} + ٣س − ٢٧ = ٠

(٢س + ٩)(س − ٣) = ٠

س = − ٤$\frac{١}{٢}$ أو س = ٣



∴ الجزء المقطوع من المحور السيني هو − ٤$\frac{١}{٢}$، ٣

لحلّ المتباينة ٢س^{٢} + ٣س − ٢٧ ⩾ ٠، نحتاج إلى إيجاد قيم س التي يكون المنحنى عندها صفرًا أو سالبًا (تحت محور السينات).

الحلّ هو − ٤$\frac{١}{٢}$ ⩽ س ⩽ ٣

مثـــال ١٦

أوجد قيم ك إذا كان المعادلة ك س^{٢} − ٢ك س + ٨ = ٠ جذران مختلفان.

الحـــلّ:

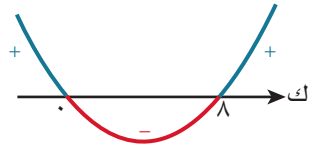
ك س^{٢} − ٢ك س + ٨ = ٠ ..... لأنه يوجد جذران مختلفان، فإنّ: ب^{٢} − ٤أجـ > ٠

(−٢ك)^{٢} − ٤ × ك × ٨ > ٠ ..... عوّض عن أ، ب، جـ

٤ك^{٢} − ٣٢ك > ٠

٤ك(ك − ٨) > ٠

يمكن أن نستخدم المنحنى لنرى أن قيم النقاط الحرجة هي ٠، ٨، أي ك < ٠ أو ك > ٨



مُساعَدة

سيتم التعبير عن ك في صورة متباينة.

استكشف ١

سُئل نوّاف أن يحلّ المتباينة $\frac{٢س - ٤}{س} \leqslant ٧$

فعرض الحل الآتي:

اضرب طرفَي المتباينة في س: $٢س - ٤ \leqslant ٧س$

اطرح ٢س من كلا الطرفَين: $-٤ \leqslant ٥س$

اقسم الطرفَين على ٥: $س \geqslant -\frac{٤}{٥}$

جرّب خالد أن يتأكّد ما إذا كان س = -١ يحقّق المتباينة الأصلية،

فكتب:

عندما س = -١: $(٢(-١) - ٤) \div (-١) = ٦$

وعليه، فإنّ س = -١ هي قيمة لـ س لا تحقّق المتباينة الأصلية.

فيكون حلّ نوّاف غير صحيح!

ناقش حلّ نوّاف مع زملائك في الصف، شارحًا الخطأ الذي وقع فيه.

كيف يمكن أن يعالج نوّاف المسألة ليحصل على الحلّ الصحيح؟

تمارين ١-٧

١) حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ) $س(س - ٣) \geqslant ٠$

ب) $(س - ٣)(س + ٢) < ٠$

ج) $(س - ٦)(س - ٤) \geqslant ٠$

د) $(٢س + ٣)(س - ٢) > ٠$

هـ) $(٥ - س)(س + ٦) \leqslant ٠$

و) $(١ - ٣س)(٢س + ١) > ٠$

٢) حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ) $س^٢ - ٢٥ \leqslant ٠$

ب) $س^٢ + ٧س + ١٠ \geqslant ٠$

ج) $س^٢ + ٦س - ٧ < ٠$

د) $١٤س^٢ + ١٧س - ٦ \geqslant ٠$

هـ) $٦س^٢ - ٢٣س + ٢٠ > ٠$

و) $٤ - ٧س - ٢س^٢ > ٠$

٣) حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ) $س^٢ > ٣٦ - ٥س$

ب) $١٥س < س^٢ + ٥٦$

ج) $س(س + ١٠) \geqslant ١٢ - س$

د) $س^٢ + ٤س < ٣(س + ٢)$

هـ) $(س + ٣)(١ - س) > س - ١$

و) $(٤س + ٣)(٣س - ١) < ٢س(س + ٣)$

ز) $(س + ٤)^٢ \leqslant ٢٥$

ح) $(س - ٢)^٢ < ١٤ - س$

ط) $٦س(س + ١) < ٥(٧ - س)$

٤) أوجِد قيم س التي تحقّق $\frac{٥}{٢س^{٢} + س - ١٥} < ٠$

٥) أوجِد قيم س التي تحقّق:

أ) $س^{٢} - ٣س \leqslant ١٠$ ، $(س - ٥)^{٢} < ٤$

ب) $س^{٢} + ٤س - ٢١ \geqslant ٠$ ، $س^{٢} - ٩س + ٨ < ٠$

ج) $س^{٢} + س - ٢ < ٠$ ، $س^{٢} - ٢س - ٣ \leqslant ٠$

٦) أوجِد قيم س التي تحقّق $٢^{س^{٢} - ٣س - ٤٠} < ١$

٧) حلَّ كلّ متباينة من المتباينات الآتية:

أ) $\frac{س(س - ١)}{س + ١} < س$

ب) $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ١} \leqslant ٤$

ج) $\frac{س^{٢} - ٢س - ١٥}{س - ٢} \leqslant ٠$

د) $\frac{س^{٢} + ٤س - ٥}{س^{٢} - ٤} \geqslant ٠$

هـ) $\frac{س - ٣}{س + ٤} \leqslant \frac{س + ٢}{س - ٥}$

١-٨ التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية

يوجد رابط بين عدد جذور المعادلة التربيعية أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ والمنحنى المناظر للدالّة ص = أس^{٢} + ب س + جـ

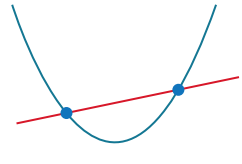
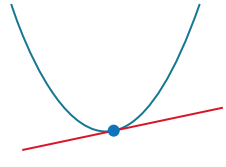
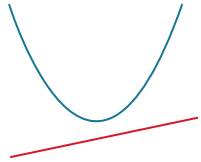
ب^{٢} - ٤أجـ	نوع الجذور	شكل منحنى الدالّة ص = أس^{٢} + ب س + جـ
٠ <	جذران حقيقيان مختلفان	يقطع المنحنى المحور السيني في نقطتَين مختلفتَين
٠ =	جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر)	يلامس المنحنى محور السينات في نقطة واحدة.
٠ >	لا توجد جذور حقيقية	يقع المنحنى تحت محور السينات أو فوق محور السينات بشكل كامل.

تعلّمنا سابقًا أن نجد نقاط تقاطع مستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية عبر حلّ معادلتَيهما آنيًّا.

يساعدنا مميز المعادلة الناتجة على معرفة عدد نقاط تقاطعهما. الحالات الثلاث الممكنة مبيّنة في الجدول الآتي:

ب^{٢} - ٤أجـ	نوع الجذور	المستقيم ومنحنى الدالّة
٠ <	جذران حقيقيان مختلفان	نقطتا تقاطع مختلفتان.
٠ =	جذران حقيقيان متساويان (جذر مكرّر)	نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ).
٠ >	لا توجد جذور حقيقية	لا توجد نقاط تقاطع.

يوجد ثلاث حالات ممكنة عندما يتقاطع خطّ مستقيم مع منحنى الدالّة التربيعية.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
يوجد نقطتا تقاطع	يوجد نقطة تقاطع واحدة	لا يوجد نقطة تقاطع
يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين.	يلامس المستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط، ممّا يعني أنّ المستقيم مماسّ Tangent للمنحنى.	لا يقطع المستقيم المنحنى.

مثـــال ١٧

أوجِد قيمة ك بحيث يكون المستقيم ص = س + ك مماسّ لمنحنى الدالّة ص = س^{٢} + ٥س + ٢

الحـــلّ:

س^{٢} + ٥س + ٢ = س + ك ..... ساو بين المعادلتين

س^{٢} + ٤س + (٢ − ك) = ٠ ..... أعد ترتيب الحدود.

بما أنّ المستقيم مماسّ للمنحنى، فإنّ مميّز المعادلة التربيعية يجب أن يساوي صفرًا. لذا:

ب^{٢} − ٤أجـ = ٠

٤^{٢} − ٤ × ١ × (٢ − ك) = ٠ ..... عوّض.

١٦ − ٨ + ٤ك = ٠

٤ك = −٨

ك = −٢

يتضمن المثال الآتي معادلة تربيعية تساعدنا في إيجاد شروط التقاطع بين المستقيم والمعادلة التربيعية.

مثـــال ١٨

أوجِد مجموعة قيم ك بحيث يقطع المستقيم ص = ك س − ١ منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٢س في نقطتَين مختلفتَين.

الحـــلّ:

س^{٢} − ٢س = ك س − ١ ..... ساو بين المعادلتين

س^{٢} − (ك + ٢)س + ١ = ٠ ..... أعد ترتيب الحدود.

بما أنّ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتَين مختلفتَين، فإنّ مميّز المعادلة التربيعية يجب أن يكون أكبر من الصفر.

ب^{٢} − ٤أجـ > ٠

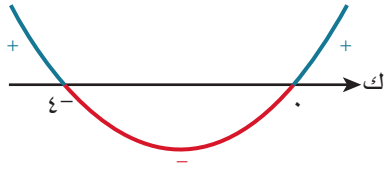
(ك + ٢)^{٢} − ٤ × ١ × ١ > ٠ ..... عوّض.

ك^{٢} + ٤ك > ٠

ك(ك + ٤) > ٠

القيمتان هما −٤، ٠

وعليه، يكون ك < −٤ أو ك > ٠



تمارين ١-٨

١) أوجِد قيم ك بحيث يكون المستقيم ص = ك س + ١ مماسًّا لمنحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٧س + ٢

٢) أوجِد قيم ك بحيث يكون المحور السيني مماسًّا لمنحنى الدالّة ص = س^{٢} − (ك + ٣)س + (٣ك + ٤)

٣) المستقيم ص = ك − ٣س مماسّ لمنحنى الدالّة س^{٢} + ٢س ص − ٢٠ = ٠

أ أوجِد قيم ك الممكنة.

ب لكلّ قيمة من قيم ك، أوجِد إحداثيات التقاطع مع المنحنى.

٤) أوجِد قيم م بحيث يكون المستقيم ص = م س + ٦ مماسًّا لمنحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٤س + ٧

أوجد إحداثيات نقطة تماسّ المستقيم مع المنحنى لكلّ قيمة من قيم م

٥) أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ٢س − ١ مع منحنى الدالّة ص = س^{٢} + ك س + ٣ في نقطتَين مختلفتَين.

٦) أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ك − س مع منحنى الدالّة ص = ٥ − ٣س − س^{٢} في نقطتَين مختلفتَين.

٧) أوجِد قيم ع بحيث لا يتقاطع المستقيم ص = ع س + ٥ مع منحنى الدالّة ص = س^{٢} − س + ٦

٨) أوجِد قيم ك التي بحيث لا يتقاطع المستقيم ص = ٢س − ١٠ مع منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٦س + ك

٩) أوجِد قيمة ك بحيث يكون المستقيم ص = ك س + ٦ مماسًّا للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} − ١٠س + ٨ص = ٨٤

★ **١٠)** المستقيم ص = م س + جـ مماسّ لمنحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٤ س + ٤

بيِّن أن م^{٢} + ٨م + ٤ جـ = ٠

★ **١١)** المستقيم ص = م س + جـ مماسّ للمنحنى أس^{٢} + ب ص^{٢} = جـ، حيث أ، ب، جـ، م أعداد ثابتة، ب ≠ ٠

بيّن أن م^{٢} = $\frac{\text{أ ب جـ} - \text{أ}}{\text{ب}}$

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

يمكن حلّ المعادلات التربيعية بالطرق الآتية:

- الإكمال إلى مُربّع.
- استخدام الصيغة التربيعية س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤أجـ}}{٢أ}$

حلّ المعادلات الآنيّة (معادلة خطيّة ومعادلة تربيعية)

- أعِد ترتيب حدود المعادلة حيث تكتب س بدلالة ص أو ص بدلالة س
- عوِّض عن س أو ص في المعادلة التربيعية ثمّ حلَّ المعادلة الناتجة منها.

النقطة العظمى والنقطة الصغرى ومحور التماثل

للدالّة التربيعية د(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ والتي تكتب في صورة د (س) = أ(س – ل)^{٢} + ك:

- معادلة محور التماثل هي س = ل = $-\frac{ب}{٢أ}$
- إذا كان أ < ٠ فيوجد قيمة صغرى عند النقطة (ل، ك).
- إذا كان أ > ٠ فيوجد قيمة عظمى عند النقطة (ل، ك).

المعادلة التربيعية أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ ومنحنى الدالّة ص = أس^{٢} + ب س + جـ

- المميّز = ب^{٢} – ٤ أجـ
- إذا كان ب^{٢} – ٤ أجـ < ٠ فيكون للمعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.
- إذا كان ب^{٢} – ٤ أجـ = ٠ فيكون للمعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠ جذران حقيقيان متساويان.
- إذا كان ب^{٢} – ٤ أجـ > ٠ لا توجد جذور حقيقية للمعادلة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠
- الشرط الواجب توافره ليكون للمعادلة التربيعية جذور حقيقية هو ب^{٢} – ٤ أجـ ≥ ٠

تقاطع المستقيم مع منحنى الدالّة التربيعية بالصورة العامة

- إذا تقاطع مستقيم مع منحنى دالّة تربيعية بالصورة العامة في نقطة واحدة، فيكون المستقيم مماسًّا للمنحنى عند تلك النقطة.
- يؤدّي حلّ معادلتَي المستقيم والدالّة التربيعية آنيًّا إلى معادلة في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠
- تعطي العبارة ب^{٢} – ٤ أجـ معلومات عن تقاطع المستقيم مع منحنى الدالّة التربيعية:

ب^{٢} – ٤أجـ	نوع الجذور	المستقيم ومنحنى الدالّة التربيعية
٠ <	جذران حقيقيان مختلفان	نقطتا تقاطع مختلفتان
٠ =	جذران حقيقيان متساويان (جذر واحد مكرّر)	نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ للمنحنى)
٠ >	لا توجد جذور حقيقية	لا توجد نقاط تقاطع

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى

١) أ اكتب ٩س^{٢} − ١٥س في صورة (٣س − أ)^{٢} − ب

ب أوجِد قيم س التي تحقّق المتباينة ٩س^{٢} − ١٥س > ٦

٢) أوجِد جذور المعادلة $\frac{٣٦}{س^{٤}} + ٤ = \frac{٢٥}{س^{٢}}$

٣) أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ك س − ٣ مع منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٩س في نقطتَين مختلفتَين.

٤) أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ٢س + ك مع المنحنى ص = ١ + ٢ك س − س^{٢} في نقطتَين مختلفتَين.

٥) أ أوجِد إحداثيات رأس منحنى الدالّة التربيعية ص = ٤س^{٢} − ١٢س + ٧

ب أوجِد قيم العدد الثابت ك إذا كان المستقيم ص = ك س + ٣ مماسًّا لمنحنى الدالّة ص = ٤س^{٢} − ١٢ س + ٧

٦) منحنى معادلته ص = ٥ − ٢س + س^{٢} ومستقيم معادلته ص = ٢س + ك، حيث ك عدد ثابت.

أ بيِّن أنّ الإحداثَي السيني لنقاط تقاطع المنحنى مع المستقيم تحقّق المعادلة س^{٢} − ٤س + (٥ − ك) = ٠

ب يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين ا ، ب لإحدى قيم ك. أوجِد إحداثيات النقطة ب إذا علمت أن إحداثيات النقطة ا هي (−٢، ١٣).

ج إذا كان المستقيم مماسًّا للمنحنى عند النقطة ج، أوجِد قيمة ك وإحداثيات النقطة ج

٧) منحنى معادلته ص = س^{٢} − ٥س + ٧ ومستقيم معادلته ص = ٢س − ٣

أ بيِّن أنّ منحنى الدالّة يقع فوق محور السينات.

ب أوجِد إحداثيات نقاط تقاطع المستقيم مع منحنى الدالّة.

ج اكتب قيم س التي تحقّق المتباينة س^{٢} − ٥س + ٧ > ٢س − ٣

٨) منحنى معادلته ص = ١٠س − س^{٢}

أ اكتب ١٠س − س^{٢} في صورة أ − (س + ب)^{٢}

ب اكتب إحداثيات رأس منحنى الدالّة.

ج أوجِد قيم س حيث ص ⩾ ٩

٩) منحنى معادلته ص = س^{٢} − ٤س + ٤ ومستقيم معادلته ص = م س، حيث م عدد ثابت.

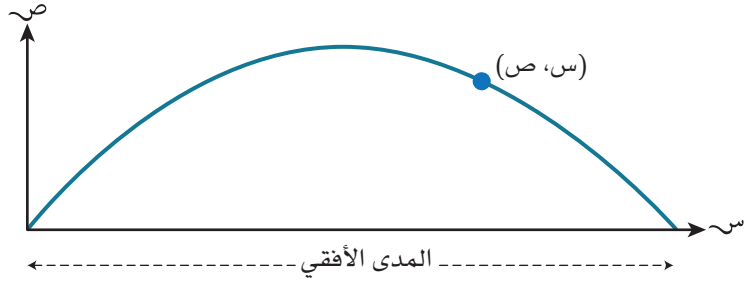
أ) إذا كانت م = ١، يتقاطع المستقيم والمنحنى عند النقطتَين ا، ب، فأوجِد إحداثيات النقطتَين ا، ب

ب) أوجِد قيمة م التي تجعل المستقيم مماسًّا للمنحنى، وأوجِد إحداثيات نقطة التماسّ.

١٠) أ) اكتب ٢س^{٢} − ٤س + ١ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ وأوجِد إحداثيات نقطة القيمة الصغرى للمنحنى ص = ٢س^{٢} − ٤س + ١

ب) إذا قطع المستقيم س − ص + ٤ = ٠ منحنى الدالّة ص = ٢س^{٢} − ٤س + ١ عند النقطتَين ك، ل، وكانت إحداثيات ك(٣، ٧). أوجد إحداثيات النقطة ل

١١) تمثّل المعادلة ص = $\sqrt{٣}$ س − $\frac{٤٩س^{٢}}{٩٠٠٠}$ مسار جسم مقذوف، حيث قيم س، ص بالأمتار.



أ) أوجد المدى الأفقي لهذا الجسم المقذوف.

ب) أوجد أكبر ارتفاع يصل إليه هذا الجسم المقذوف.

المحتويات

المقدمة ..... **xiii**

الوحدة الثانية: الدوالّ

٢–١ تعريف الدالّة ٥١

٢–٢ الدوالّ المركّبة ٥٧

٢–٣ الدوالّ العكسيّة ٦٢

٢–٤ منحنى الدالّة ومنحنى دالّتها العكسيّة ٦٧

٢–٥ التحويلات الهندسيّة للدوالّ ٧١

٢–٥أ الانسحاب ٧١

٢–٥ب الانعكاس ٧٥

٢–٥ج التمدّد ٧٧

٢–٦ تركيب التحويلات الهندسيّة ٨٠

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثانية ٨٨

المقدمة

قد تكون الرياضيات عاملًا مساعدًا في تغيير مسار حياتك. فمن ناحية نرى أن العديد من المقررات في الجامعة تتطلب أن تكون كفوءًا في الرياضيات، أو تسعى إلى استقطاب الطلبة الذين يجيدون هذه المادة. ومن ناحية أخرى، تتدرّب من خلالها على تعلم التفكير بشكل أكثر دقة ومنطقية، مع التشجيع على الإبداع أيضًا. فممارسة الرياضيات تشبه إلى حدّ بعيد ممارسة الفن، فكما يحتاج الفنان إلى إتقان أدواته (استخدام فرشاة الرسم، والقماش) وإلى فهم الأفكار النظرية (الأبعاد والألوان وما إلى ذلك)، كذلك يفعل عالم الرياضيات (باستخدام فروع الجبر والهندسة، والتي ستتعرف عليها في هذا الكتاب). لكن هذا ليس سوى الناحية العملية من الموضوع، إذ كما يأتي الفرح في الفن من الإبداع، عندما يستخدم الفنان أدواته للتعبير عن الأفكار بأساليب جديدة، كذلك يكون شعور الفرح العميق في الرياضيات عند إنجاز حلّ المسائل المطروحة.

قد تتساءل عن ماهية **المسألة الرياضية**، ولا شكّ أنه سؤال وجيه، إذ قام العديد من الأشخاص بمحاولات للإجابة عنه. وقد ترغب في تقديم جوابك الخاص عن هذا السؤال، والتفكير في كيفية تطوّره مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي سؤال رياضي لا تعرف كيف تجيب عنه على الفور، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا للإجابة عنها، وقد تضطر إلى تجربة طرائق مختلفة، باستخدام أدوات أو أفكار مختلفة، بنفسك أو مع الآخرين، حتى تكتشف أخيرًا طريقة لحلّها. وقد يطول الوقت إلى ساعات أو أيام أو حتى أسابيع لتحقيقها، لكنك في النهاية تشعر بفرح إنجاز الحلّ على الرغم من الجهد الذي بذلته.

بالإضافة إلى الأفكار الرياضية التي ستتعلمها في هذا الكتاب، فإن مهارات حلّ المسائل التي ستطورها سوف تساعدك أيضًا في مسيرة حياتك، مهما كان التخصص الذي ستختاره بعد تخرّجك. فكثيرًا ما يواجه الطلبة مسائل تحتاج إلى حل، سواء كان ذلك في العلوم أو الهندسة أو الرياضيات أو المحاسبة أو القانون أو غيرها، وسيكون شعور الثقة والعمل بشكل منهجي مفيدًا إلى أقصى الحدود.

سيدعمك هذا الكتاب لتعلم الرياضيات المطلوبة للاختبارات ولتطوير مهاراتك في حل المسائل الرياضية.

إن التواصل مع الآخرين سواءٌ عبر الكلام أو الكتابة أو الرسم هو من أهم ما يميز الإنسان، وهذا ينطبق تمامًا على الرياضيات. ألم يكن الحساب (الرياضيات) أحد أركان الفنون السبعة بحسب المفهوم اللاتيني؟ أولم يكن علماء الرياضيات العرب قديمًا يشيرون إلى الرياضيات على أنها 'فن'؟ فلا غنى عن الرياضيات لبناء جسور التواصل الإنساني، خلافًا للاعتقاد السائد بأن الرياضيات مادة جافة لا تتخطّى حدود الكتب المدرسية. والحقيقة أن التواصل الرياضي يأتي بأشكال عديدة، ومناقشة الأفكار الرياضية مع الزملاء جزء رئيسي من عمل كل عالم رياضيات. فأثناء دراستك هذه المادة، ستعمل على حل العديد من المسائل، وسيساعدك استكشافها بالتعاون مع زملائك في الفصل على تطوير فهمك وتفكيرك، بالإضافة إلى تحسين مهارات التواصل (الرياضية) لديك. وتشكل القدرة على إقناع الآخرين بصحة تفكيرك، لفظيًا أولًا ثم كتابيًا، جوهر المهارة الرياضية القائمة على 'البرهان'.

النمذجة أو التمثيل الرياضي هو المكان الذي تتقاطع فيه الرياضيات مع 'العالم الحقيقي'. ثمّة العديد من المواقف التي يحتاج فيها الإنسان إلى التوقع أو فهم ما يحدث في العالم، وفي هذا المجال تؤمّن الرياضيات كثيرًا من أدوات المساعدة. إذ ينظر علماء الرياضيات إلى عالم الواقع محاولين التعبير عن قضاياه الرئيسية في شكل معادلات، وبالتالي بناء تمثيل حقيقي له. ويستخدمون هذا التمثيل للقيام بتوقعات حيثما أمكن؛ وإذا لزم الأمر، سيحاولون تحسين التمثيل للوصول إلى توقعات أفضل. تشمل الأمثلة التوقعات بحالة الطقس، وتمثيل تغير المناخ، وعلم الطب الشرعي (لفهم حادثة ما أو جريمة)، وتمثيل التغير السكاني في ممالك الإنسان والحيوان والنبات، وتمثيل سلوك الطائرات والسفن، وتمثيل الأسواق المالية، وغيرها... وفي هذا الكتاب، سنطور الفهم والقدرة على نمذجة المحتوى رياضيًا وحل مسائل متنوعة.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- أنشطة أستكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بإغناء تفكير زميلهم، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة عن نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، يجري بعدها مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.
- الأسئلة المصنفة برمز النجمة ' ★ ، ★ ، ★ أو ★ ' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'النمذجة' أو 'حل المسائل' ولا ترتبط بهدف محدّد بل تركّز على ترابط المفاهيم بعضها ببعض، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا، بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). إنها أيضًا الطريقة التي يكتب فيها علماء الرياضيات المحترفون معلوماتهم. وبما أن الاختبارات الجديدة قد تتضمن أسئلة غير مألوفة لديك، فكونك مشاركًا نشطًا في تعلم الرياضيات، سوف يمكّنك من التعامل مع مثل هذه الأسئلة تعاملًا أكثر نجاحًا.

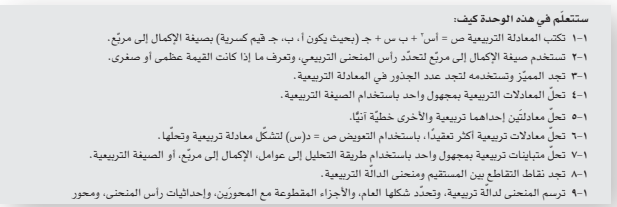
توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد. إن استكشاف هذه المواقع الإلكترونية ليس نشاطًا إلزاميًا، ولكنه يساعد على تعزيز فهمك وعمق معرفتك بشكل كبير من خلال استكمال الأنشطة المقترحة.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون دراستك لهذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.



ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تكتب المعادلة التربيعية ص = أس^{٢} + ب س + جـ (بحيث يكون أ، ب، جـ قيم كسرية) بصيغة الإكمال إلى مربّع.

١-٢ تستخدم صيغة الإكمال إلى مربّع لتحدّد رأس المنحنى التربيعي، وتعرف ما إذا كانت القيمة عظمى أو صغرى.

١-٣ تجد المميّز وتستخدمه لتجد عدد الجذور في المعادلة التربيعية.

١-٤ تحلّ المعادلات التربيعية بمجهول واحد باستخدام الصيغة التربيعية.

١-٥ تحلّ معادلتين إحداهما تربيعية والأخرى خطيّة آنيًا.

١-٦ تحلّ معادلات تربيعية أكثر تعقيدًا، باستخدام التعويض ص = د(س) لتشكّل معادلة تربيعية وتحلّها.

١-٧ تحلّ متباينات تربيعية بمجهول واحد باستخدام طريقة التحليل إلى عوامل، الإكمال إلى مربّع، أو الصيغة التربيعية.

١-٨ تجد نقاط التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية.

١-٩ ترسم المنحنى لدالّة تربيعية، وتحدّد شكلها العام، والأجزاء المقطوعة مع المحورَين، وإحداثيات رأس المنحنى، ومحور

الأهداف التعليمية تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

نتيجة ١

س^{٢} + ٢دس = (س + د)^{٢} − د^{٢} ، س^{٢} − ٢دس = (س − د)^{٢} − د^{٢}

نتيجة: تم إدراجها في إطارات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

الصيغة التربيعية
Quadratic formula

المفردات الأساسية هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

استكشف ١

سُئل نوّاف أن يحلّ المتباينة $\frac{٢س - ٤}{س} \geq ٧$

فعرض الحل الآتي:

اضرب طرفَي المتباينة في س: ٢س − ٤ ≥ ٧س

اطرح ٢س من كلا الطرفَين: −٤ ≥ ٥س

اقسم الطرفَين على ٥: س ≥ $-\frac{٤}{٥}$

جرّب خالد أن يتأكّد ما إذا كان س = −١ يحقّق المتباينة الأصلية، فكتب:

عندما س = −١ : (٢(−١) − ٤) ÷ (−١) = ٦

وعليه، فإنّ س = −١ هي قيمة لـ س لا تحقّق المتباينة الأصلية.

استكشف تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الحادية عشرة	تحلّ معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.	١) حلّ: أ) س^{٢} + س − ١٢ = ٠ ب) س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠ جـ) ٣س^{٢} − ١٧س = ٦
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحلّ متباينات خطّية.	٢) حلّ: أ) ٥س − ٨ > ٢ ب) ٣ − ٢س ≥ ٧
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحلّ معادلات خطيّة آنيّة.	٣) حلّ: أ) ٢س + ٣ص = ١٣ ٧س − ٥ص = −١ ب) ٢س − ٧ص = ٣١

المفردات

الإكمال إلى مُربّع	completing the square
نقطة القيمة الصغرى	minimum point
نقطة القيمة العظمى	maximum point
نقطة الثبات	stationary point
نقطة التحوّل	turning point
الجذور	roots
المميّز	discriminant

معرفة قبلية تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

مثال ٢

اكتب العبارة الجبرية ٢س^{٢} − ١٢س + ٣ في صورة ل(س − ك)^{٢} + ر، حيث ل، ك، ر أعداد ثابتة.

الحلّ:

الطريقة (١)

٢س^{٢} − ١٢س + ٣ = ٢(س^{٢} − ٦س) + ٣ ..... خذ ٢ كعامل مشترك من الحدين.

٦− ÷ ٢ = ٣

س^{٢} − ٦س = (س − ٣)^{٢} − ٣^{٢} ..... أكمل المربع لـ (س^{٢} −٦س)

٢[(س − ٣)^{٢} − ٩] + ٣

٢(س − ٣)^{٢} − ١٨ + ٣

٢(س − ٣)^{٢} − ١٦

إذًا ل = ٢، ك = ٣، ر = −١٦

هناك طريقة بديلة أيضًا:

أمثلة تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن خطوات الحل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

مُساعَدة

عندما أ^{٢} تساوي عددًا موجبًا، فإن أ يكون لها قيمتان: إحداهما موجبة والأخرى سالبة.

مساعدة: تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

هل تعلم؟

أن أول شخص قدّم الأعداد العشرية غير المنتهية هو سيمون ستيفن Simon Stevin سنة ١٥٨٥م. كان رياضيًّا مهمًا، وهو من جعل استخدام الأعداد العشرية أكثر عمومية في كتابه الذي أسماه 'De Thiende' 'الأعشار'.

هل تعلم؟ تحتوي على حقائق مثيرة للاهتمام تظهر كيف ترتبط الرياضيات بالعالم الأوسع.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

يمكن حلّ المعادلات التربيعية بالطرق الآتية:

- الإكمال إلى مُربّع.
- استخدام الصيغة التربيعية س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

حلّ المعادلات الآنيّة (معادلة خطيّة ومعادلة تربيعية)

- أعِد ترتيب حدود المعادلة حيث تكتب س بدلالة ص أو ص بدلالة س
- عوِّض عن س أو ص في المعادلة التربيعية ثمّ حلّ المعادلة الناتجة منها.

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

توجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم ترميز الأسئلة كالآتي:

- ★ تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- ★ تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- ★ تركز هذه الأسئلة على النمذجة.
- ★ تتضمّن بعض التمارين أسئلة لا ترتبط مباشرة بالهدف التعليمي المحدّد للدرس.
- ★ هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.
- يجب ألّا تستخدم الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى

١) أ) اكتب ٩س^{٢} − ١٥س في صورة (٣س − أ)^{٢} − ب

ب) أوجِد قيم س التي تحقّق المتباينة ٩س^{٢} − ١٥س < ٦

٢) أوجِد جذور المعادلة $\frac{٣٦}{س^{٤}} + ٤ = \frac{٢٥}{س^{٢}}$

٣) أوجِد قيم ك عندما يتقاطع المستقيم ص = ك س − ٣ مع منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٩س في نقطتَين مختلفتَين.

الوحدة الثانية
الدوالّ Functions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٢-١ تفهم المصطلحات الآتية: الدالّة، المجال، المدى، الدالّة واحد إلى واحد، وتحدّد ما إذا كانت الدالّة هي واحد إلى واحد أم لا، تحدّد المدى لدوالّ معطاة.

٢-٢ تفهم مصطلح الدوالّ المركّبة. تفهم تركيب دالّتين، بشرط أنّ الدالّة المركّبة ع ○ د ← ع(د(س)) يمكن تشكيلها عندما يكون مدى الدالّة د(س) مجموعة جزئية من مجال الدالّة ع(س)؛ تجد تركيب دالتَين مُعطاتَين (باستخدام دوالّ خطية وتربيعية وجذرية وكسرية)

٢-٣ تفهم مصطلح الدالّة العكسية وتجد الدالّة العكسية لدالّة واحد إلى واحد.

٢-٤ تفهم بيانيّا العلاقة بين دالّة واحد إلى واحد ومعكوسها.

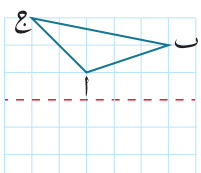
٢-٥أ) تفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = د(س) + ب و ص = د(س + أ)، وتحدّد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، وترسم التمثيلات البيانية المحولة.

ب) تفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = -د(س) و ص = د(-س)، وتحدّد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، وترسم التمثيلات البيانية المحولة.

ج) تفهم التأثير البياني لتحويلات التمثيل البياني لـ ص = د(س) المعطى بواسطة ص = أد(س) و ص = د(أس)، وتحدّد نوع التحويل الهندسي من خلال التمثيل الجبري المعطى، وترسم التمثيلات البيانية المحولة.

د) تفهم التأثير البياني لتركيب من تحويلين هندسيين لبيانات ص = د(س)، عندما ص = د(س) + ب، ص = د(س + أ)، ص = -د(س)، ص = د(-س)، وتحدّد التحويل الهندسي من تمثيل جبري إلى تمثيل آخر، ترسم البيانات المحولة لمنحنى ص = د(س).

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا أن	اختبر مهاراتك
الصف العاشر الوحدة الثامنة	توجد مخرجات دالّة معطاة.	١) إذا علمت أن د(س) = ٣س − ٢، فأوجد د(٤).
الصف العاشر الوحدة الثامنة	توجد دالّة مركّبة.	٢) إذا علمت أن د(س) = ٢س + ١، ع(س) = ١ − س، فأوجد (د ○ ع)(س).
الصف العاشر الوحدة الثامنة	توجد الدالّة العكسية لدالّة بسيطة.	٣) إذا كانت د(س) = ٥س + ٤ فأوجد د$^{-١}$(س).
الصف الحادي عشر الوحدة الأولى	تُكمل إلى المربّع.	٤) اكتب ٢س^{٢} − ١٢س + ٥ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ
الصف التاسع الوحدة الثامنة	توجد تحويلات هندسية لعدة أشكال	٥) أوجد صورة المثلث أ ب ج بالانعكاس حول الخط الأحمر المنقط. 

المفردات

واحد إلى واحد
one-one

متعدّد إلى واحد
many-one

مجال الدالّة domain

مدى الدالّة range

الدالّة المركّبة
composite function

الدالّة العكسية
inverse function

الدالّة العكسية لنفسها
self-inverse function

لماذا ندرس الدوالّ؟

سبق أن تعلّمت في الصف العاشر كيفية تفسير العبارات الجبرية في صورة دوالّ لها مدخلات ومخرجات، وكيفية إيجاد تركيب الدوالّ البسيطة والدوالّ العكسية البسيطة.

يوجد الكثير من المواقف اليومية التي يمكن تمثيلها في صورة دوالّ، مثل:

- العلاقة بين درجة حرارة مشروب ساخن، وتبريده مع مرور الزمن.
- العلاقة التي تمثّل ارتفاع نقطة على عجلة سيارة أثناء سيرها.
- العلاقة التي تمثّل ارتفاع الماء في بركة عند ملئها من صنبور الماء والزمن المستغرق لذلك.
- العلاقة التي تمثل عدد البكتيريا التي تتكاثر بعد بدء تجربة ما.

كل ذلك هي أمثلة على العلاقات بين كمّيتين أو مقياسين؛ الزمن ودرجة الحرارة، الطول والمسافة، العمق والزمن، عدد البكتيريا والزمن، وكيف يؤثر التغيير في أحدهما على التغيير في الآخر. يساعدنا تمثيل هذه المواقف باستخدام الدوالّ المناسبة على القيام بتوقعات تتعلّق بمواقف من الحياة اليومية، على سبيل المثال: ما الزمن المستغرق ليتجاوز عدد البكتيريا الخمسة ملايين بكتيريا؟

في هذه الوَحدة، سوف نبني فهمًا مُعمّقًا للدوالّ وخواصها.

٢-١ تعريف الدالّة

العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعة ما بعناصر مجموعة أخرى.

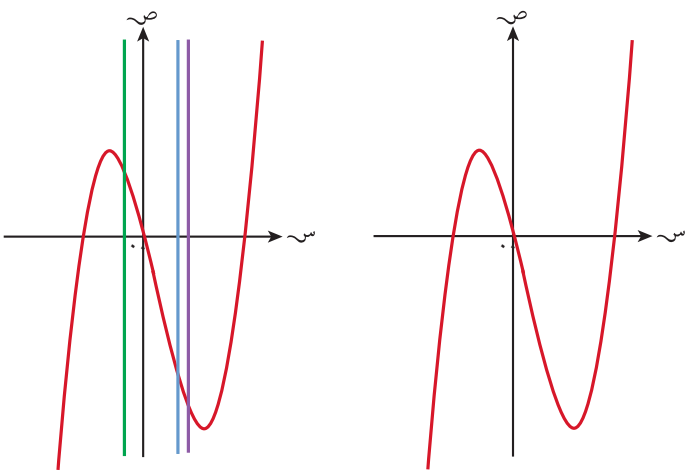
الدالّة هي علاقة بين عناصر مجموعتين، حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

أي دالة تمثل علاقة، ولكن ليست كل علاقة تمثل دالّة.

قد تكون الدالّة **واحدًا إلى واحد one-one** أو **متعدّدًا إلى واحد many-one** (ليست واحدًا إلى واحد).

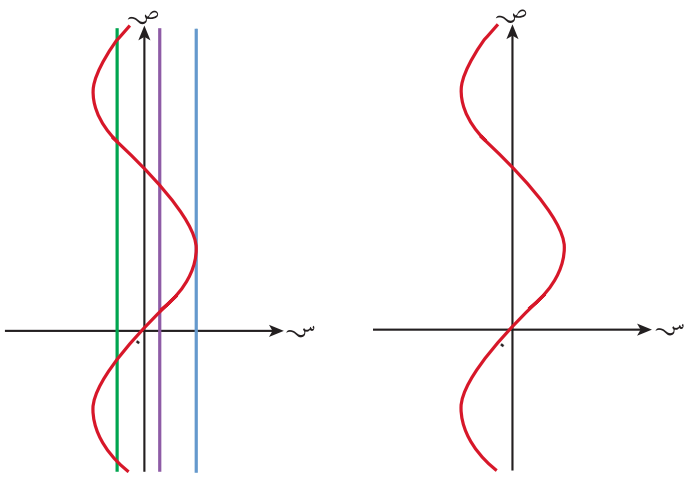
من الدلائل على إثبات أن منحنى ما يمثّل دالّة هو رسم مستقيم رأسي عليه. فإذا لم يقطع المستقيم الرأسي المنحنى في أكثر من نقطة، فإنه سيكون دالّة.

التمثيل البياني الآتي يمثل اختبار العلاقة بأكثر من مستقيم رأسي:



نلاحظ عند رسم أي مستقيم رأسي على منحنى الدالّة، فإنه لا يتقاطع مع المنحنى إلّا في نقطة واحدة فقط؛ **لذا فإن المنحنى يمثل دالّة.**

انظر إلى مجموعة المستقيمات على المنحنى الآتي:



تقطع بعض هذه المستقيمات الرأسية المنحنى في أكثر من نقطة، لذا فإن المنحنى لا يمثل دالّة.

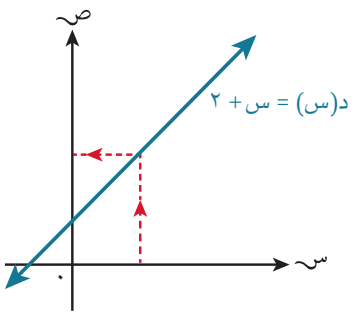
مُساعَدة

إذا رسمنا كل المستقيمات الرأسية الممكنة على منحنى العلاقة، فستكون العلاقة:

- دالّة، إذا قطع كل مستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط.
- غير دالّة، إذا قطع مستقيم واحد المنحنى في أكثر من نقطة.

الدوالّ واحد إلى واحد

تُعدّ الدالّة س ← س + ٢ أو (الدالّة د(س) حيث يرتبط س بـ س + ٢) حيث س ∈ ع مثالاً على الدالّة واحد إلى واحد.



المدخلة هي العدد الذي يوضع في الدالّة (أي إذا كانت الدالّة د(س)، فإن المدخلة هي س).

المخرجة هي العدد الناتج من تعويض المدخلة في الدالّة (أي د(س)).

نجد في الدالّة واحد إلى واحد مخرجة واحدة لكلّ مدخلة، وبالمثل فإن لكلّ مخرجة واحدة نرى مدخلة واحدة فقط مرتبطة بها.

يمكن أن نكتب هذه الدالّة في صورة د: س ← س + ٢ حيث س ∈ ع أو في صورة د(س) = س + ٢ حيث س ∈ ع

يُقرأ د: س ← س + ٢ على النحو 'الدالّة د حيث يرتبط س بـ س + ٢' أو على النحو 'الدالّة د(س) تربط س بـ س + ٢'

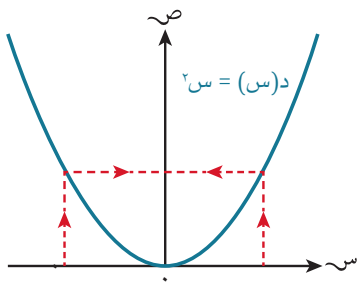
د(س) هي قيمة مخرجة للدالّة د عندما تكون قيمة المدخلة س، فمثلًا إذا كانت د(س) = س + ٢ وكانت المدخلة س = ٥ فإن د(٥) تمثّل قيمة المخرجة للدالّة د(س).

مُساعَدة

س ∈ ع تعني أن س تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

الدوالّ متعدّد إلى واحد

الدالّة س ← س^{٢} حيث س ∈ ع هي دالّة متعدّد إلى واحد:



في دالة المتعدّد إلى واحد: يوجد لكل مدخلة مخرجة واحدة، ولكن يمكن أن يكون لكل مخرجة أكثر من مدخلة.

يمكننا أن نكتب هذه الدالّة في صورة د: س ← س^{٢} حيث س ∈ ع أو د(س) = س^{٢}،

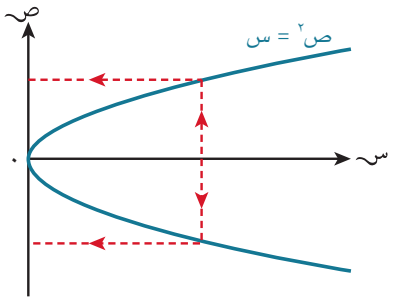
وتُقرأ د: س ← س^{٢} على النحو 'الدالّة د(س) حيث تربط س بـ س^{٢}'.

مُساعَدة

ارسم منحنى الدالّة. إذا قطع مستقيم أفقي المنحنى في أكثر من نقطة فإنها دالّة متعدد إلى واحد، وإن لم يكن كذلك فإنها دالّة واحد إلى واحد.

العلاقات واحد إلى متعدّد

إذا نظرنا إلى منحنى ص^{٢} = س:



يمكن أن نلاحظ أن لقيمة المدخلة المُبيّنة قيمتَين مخرجتَين، الأمر الذي يعني أن هذه العلاقة ليست بدالّة (علاقة واحد إلى متعدد)، بل إنها مجرّد علاقة.

تُسمّى مجموعة قيم المدخلات في الدالّة مجال الدالّة domain.

عند تعريف الدالّة، من المهمّ أن نحدّد مجالها.

على سبيل المثال، مجال الدالّة د(س) = س^{٢} لكل قيم س ∈ ع هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

وتُسمّى مجموعة قيم المخرجات في الدالّة مدى الدالّة range.

يمكن إيجاد المدى بالنظر إلى منحنى الدالّة في مجالها، مثلًا للدالّة د(س) = س^{٢} حيث س ∈ ع، المخرجات أو المدى تكون دائمًا أكبر من ٠ أو تساويه لأن س^{٢} عدد غير سالب.

نتيجة ١

الدالّة الخطية تكون دائمًا واحدًا إلى واحد، والدالّة التربيعية تكون دائمًا متعدّدًا إلى واحد إذا كان مجالها ع

مثـــال ١

إذا علمت أن الدالّة د(س) معرفة كالآتي: د(س) = (س − ٣)^{٢} + ٨، حيث −١ ⩽ س ⩽ ٩
فارسم منحنى الدالّة، وحدّد مجالها ومداها.

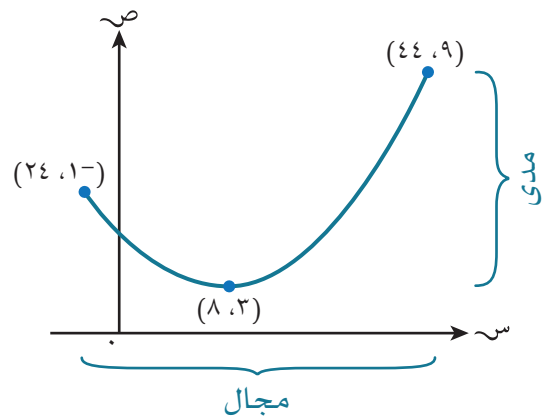
الحـــلّ:

د(س) = (س − ٣)^{٢} + ٨ دالّة تربيعية،
∵ معامل س^{٢} موجب،
∴ سيكون المنحنى في صورة ∪.

(س − ٣)^{٢} + ٨

الجزء (س − ٣)^{٢} مربّع كامل، لذا فإنه ⩾ ٠ دائمًا.
وعليه، فإن أصغر قيمة يمكن أن يصل إليها هي الصفر.
ويحصل ذلك عندما س = ٣

القيمة الصغرى للعبارة هو ٠ + ٨ = ٨، ويحصل ذلك عندما س = ٣
لذا تكون للدالّة د(س) = (س − ٣)^{٢} + ٨ قيمة صغرى عند النقطة (٣، ٨).
عندما س = −١، فإن ص = (−١ − ٣)^{٢} + ٨ = ٢٤
عندما س = ٩، فإن ص = (٩ − ٣)^{٢} + ٨ = ٤٤
المجال −١ ⩽ س ⩽ ٩
المدى هو ٨ ⩽ د(س) ⩽ ٤٤



تمارين ٢-١

١) أيٌّ من العلاقات الآتية تمثّل دالّة؟ ثم حدّد ما إذا كانت العلاقة واحدًا إلى واحد أو متعدّدًا إلى واحد:

أ) ص = ٢س − ٣ ، س ∈ ع
ب) ص = س^{٢} − ٣ ، س ∈ ع
ج) ص = ٢س^{٣} − ١ ، س ∈ ع
د) ص = ٣س^{٢} + ٤ ، س ∈ ع، س ⩽ ٠

٢) استخدم برمجيات التمثيلات البيانية لتحديد أي من العلاقات الآتية تمثل دوالّ، وحدد ما إذا كانت هذه الدوالّ واحدًا إلى واحد أو متعدّدًا إلى واحد:

أ) ص = ٢^{س} ، س ∈ ع
ب) ص = $\frac{١٠}{س}$ ، س ∈ ع، س < ٠
ج) ص = $\sqrt{س}$ ، س ∈ ع، س ⩽ ٠
د) ص^{٢} = ٤س ، س ∈ ع

٣) أ) مثّل العلاقة الآتية بيانيًّا:

$$\text{ص} = \begin{cases} ٩ - \text{س}^{٢}، \text{ حيث س} \in \text{ع}، -٣ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \\ ٢\text{س} + ١، \text{ حيث س} \in \text{ع}، ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$$

ب) حدّد نوع العلاقة (واحد إلى واحد، أو متعدّد إلى واحد، أو واحد إلى متعدّد).

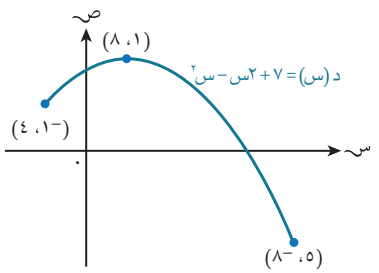
٤) أ) مثّل العلاقة الآتية بيانيًّا:

$$\text{ص} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١، \text{ حيث } ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \\ ٢\text{س} - ٣، \text{ حيث } ٢ \leqslant \text{س} \leqslant ٤ \end{cases}$$

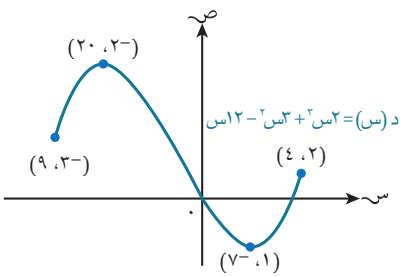
ب) وضّح أنّ هذه العلاقة ليست دالّة.

٥) حدّد المجال والمدى لكل دالّة من الدالّتَين الممثّلتَين بالمنحنيَين الآتيَين:

أ)



ب)



٦) أوجد مدى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د(س) = س + ٤ حيث س < ٨

ب) د(س) = ٢س − ٧ حيث −٣ ⩽ س ⩽ ٢

ج) د(س) = ٧ − ٢س حيث −١ ⩽ س ⩽ ٤

د) د: س ← ٢س٢ حيث ١ ⩽ س ⩽ ٤

هـ) د(س) = ٢س حيث −٥ ⩽ س ⩽ ٤

و) د(س) = $\frac{١٢}{\text{س}}$ حيث ١ ⩽ س ⩽ ٨

٧) أوجد مدى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د(س) = س٢ − ٢ حيث س ∈ ع

ب) د: س ← س٢ + ٣ حيث −٢ ⩽ س ⩽ ٥

ج) د(س) = ٣ − ٢س٢ حيث س ⩽ ٢

د) د(س) = ٧ − ٣س٢ حيث −١ ⩽ س ⩽ ٢

٨) أوجد مدى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) د(س) = (س − ٢)^{٢} + ٥ حيث س ⩽ ٢

ب) د(س) = (٢س − ١)^{٢} − ٧ حيث س ⩽ $\frac{١}{٢}$

ج) د: س ← ٨ − (س − ٥)^{٢} حيث ٤ ⩾ س ⩾ ١٠

د) د(س) = ١ + $\sqrt{٤ - س}$ حيث س ⩽ ٤

٩) اكتب كلّ دالّة من الدوالّ الآتية في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ، حيث أ، ب، جـ ثوابت، ثمّ حدّد مدى كلّ منها:

أ) د(س) = س^{٢} + ٦س − ١١ حيث س ∈ ع

ب) د(س) = ٣س^{٢} − ١٠س + ٢ حيث س ∈ ع

١٠) اكتب كلّ دالّة من الدوالّ الآتية في صورة أ − ب (س + جـ)^{٢}، حيث أ، ب، جـ ثوابت، ثمّ حدّد مدى كلّ منها:

أ) د(س) = ٧ − ٨س − س^{٢} حيث س ∈ ع

ب) د(س) = ٢ − ٦س − ٣س^{٢} حيث س ∈ ع

١١) أ) مثّل الدالّة الآتية بيانيًّا:

د(س) = { ٣ − س^{٢}، حيث ٠ ⩾ س ⩾ ٢ ؛ ٣س − ٧، حيث ٢ ⩾ س ⩾ ٤ }

ب) أوجد مدى الدالّة.

١٢) إذا علمت أن الدالّة س ← س^{٢} + ٦س + ك معرّفة على س ∈ ع، حيث ك ثابت. فأوجد مدى الدالّة بدلالة ك

١٣) إذا علمت أن الدالّة س ← ٥ − أس + ٢س^{٢} معرّفة على س ∈ ع، حيث أ ثابت. فأوجد مدى الدالّة بدلالة أ

١٤) إذا كانت د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ حيث س ∈ ع، −أ ⩾ س ⩾ ب،
فأوجد قيم أ، ب إذا كان مدى الدالّة هو −٤ ⩾ د(س) ⩾ ٥

١٥) إذا كانت د(س) = س^{٢} + س − ٤ حيث س ∈ ع، أ ⩾ س ⩾ أ + ٣،
فأوجد قيم أ الممكنة إذا كان مدى الدالّة هو −٢ ⩾ د(س) ⩾ ١٦

١٦) إذا كانت د(س) = ٢س^{٢} − ٨س + ٥ حيث س ∈ ع، ٠ ⩾ س ⩾ ك

أ) اكتب د(س) في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ

ب) حدّد قيمة ك عندما يكون لمنحنى الدالّة ص = د(س) محور تماثل.

ج) أوجد مدى الدالّة، مستخدمًا قيمة ك التي حصلت عليها في الجزئية (ب).

٢-٢ الدوالّ المركّبة

يمكن وصف معظم الدوالّ في صورة دالّتَين مركبتَين أو أكثر.

فمثلًا الدالّة س ← ٣س – ٧ هي الدالّة 'اضرب في ٣، ثم اطرح ٧'.

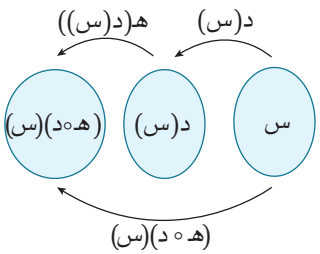
إنها تركيبة من الدالّتَين د(س)، هـ(س) حيث:

د: س ← ٣س (الدالّة 'اضرب في ٣')

هـ: س ← س – ٧ (الدالّة 'اطرح ٧')

وعليه، يمكن وصف س ← ٣س – ٧ في صورة دالّة 'طبّق د(س) أولًا، ثم طبّق هـ(س)'.

إذا طبقنا الدالّة د(س) أولًا (س ← ٣س)، فسوف نستطيع تطبيق الناتج على أنه مدخلة في الدالّة هـ (س ← ٣س – ٧) للحصول على س ← ٣س – ٧



عندما تُتبع دالّة بدالّة أخرى، يُسمى الناتج **بالدالّة المركّبة** **composite function**.

نتيجة ٢

(هـ ∘ د) (س) تعني تطبيق الدالّة د(س) على س أولًا، ثم تطبيق الدالّة هـ(س) على الناتج.

إليك ثلاث نقاط مهمّة يجب تذكّرها عند تركيب الدوالّ:

نتيجة ٣

– تتحقق هـ ∘ د فقط إذا كان مدى الدالّة د(س) مجموعة جزئية من مجال الدالّة هـ(س).

– ليس من الضرورة أن تكون (د ∘ هـ)(س) = (هـ ∘ د)(س) لجميع الدوال.

– (د ∘ د)(س) = د(د(س)).

استكشف ١

د(س) = ٢س – ٥ حيث س ∈ ع

هـ(س) = ٣س – ١ حيث س ∈ ع

طلب إلى ثلاثة طلبة أن يجدوا دالّة التركيب (هـ ∘ د)(س).

إليك الحلول التي قدّموها:

حل الطالب (أ)	حل الطالب (ب)	حل الطالب (ج)
(هـ ∘ د)(س) = (٣س – ١)(٢س – ٥) = ٦س^{٢} – ١٧س + ٥	(هـ∘د)(س) = ٢(٣س – ١) – ٥ = ٦س – ٧	(هـ∘د)(س) = ٣(٢س – ٥) – ١ = ٦س – ١٦

ناقش الحلول مع أقرانك في الصف.

أيّ الطلبة قدّم الحلّ الصحيح؟ ما الخطأ الذي ارتكبه كل من الطالبَين الآخرَين؟

مثـــال ٢

إذا علمت أن د(س) = (س − ٤)^{٢} − ١، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٢س + ٣}{س - ٢}$، حيث س ∈ ع، س > ٢

أ أوجد (د ○ هـ)(٤).

ب إذا علمت أن مدى د(س) هو د(س) ⩽ −١، اشرح سبب عدم إمكانية إيجاد (هـ ○ د)(س).

الحـــلّ:

أ (د ○ هـ)(٤) = د$\left(\frac{١١}{٢}\right)$ ..... أوجد هـ(٤) أولًا، هـ (٤) = $\frac{٢(٤) + ٣}{٤ - ٢}$ = $\frac{١١}{٢}$

= $\left(٤ - \frac{١١}{٢}\right)^{٢}$ − ١ ..... د(س) هي الدالّة "اطرح ٤، رَبّع الناتج، ثم اطرح ١"

= ١$\frac{١}{٤}$

ب لأن مدى الدالة د(س) ليس مجموعة جزئية من مجال الدالة هـ (س).

مثـــال ٣

إذا علمت أن د(س) = ٢س + ٣، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = س^{٢} − ١ حيث، س ∈ ع

فأوجد كلاًّ ممّا يأتي:

أ (د ○ هـ)(س) ب (هـ ○ د)(س) ج (د ○ د)(س)

الحـــلّ:

أ (د ○ هـ)(س) = د(هـ(س)) = د(س^{٢} − ١) ..... عوّض عن هـ(س) أولًا في الدالة د(س).

= ٢(س^{٢} − ١) + ٣ ..... د(س) هي الدالّة "اضرب في ٢، ثم زد ٣"

= ٢س^{٢} + ١

ب (هـ ○ د)(س) = هـ(٢س + ٣) ..... عوّض عن د(س) أولًا في الدالة هـ(س)

= (٢س + ٣)^{٢} − ١ ..... هـ(س) هي الدالّة "رَبّع ثم اطرح ١"

= ٤س^{٢} + ١٢س + ٩ − ١

= ٤س^{٢} + ١٢س + ٨

ج (د ○ د)(س) = د(٢س + ٣) ..... د(س) هي الدالّة "اضرب في ٢، ثم زد ٣"

= ٢(٢س + ٣) + ٣

= ٤س + ٩

مثـــال ٤

إذا علمت أن د(س) = س^{٢} + ٤س، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٣س − ١، حيث س ∈ ع

فأوجد قيم ك بحيث يكون للمعادلة (د ∘ هـ)(س) = ك حلول حقيقية.

الحـــلّ:

(د ∘ هـ)(س) = (٣س − ١)^{٢} + ٤(٣س − ١) ..... فُكّ الأقواس ثم بسِّط.

= ٩س^{٢} + ٦س − ٣

عندما (د ∘ هـ)(س) = ك

٩س^{٢} + ٦س − ٣ = ك ..... أعد ترتيب الحدود، ثم بسِّط.

٩س^{٢} + ٦س + (−٣ − ك) = ٠

لتكون الحلول حقيقية، فإن: ب^{٢} − ٤أ جـ ⩾ ٠

٦^{٢} − ٤ × ٩ × (−٣ − ك) ⩾ ٠

١٤٤ + ٣٦ك ⩾ ٠

ك ⩾ −٤

تمارين ٢-٢

١) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} + ٦ حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\sqrt{س + ٣}$ − ٢ حيث س ⩽ −٣

فأوجد كلاًّ من: أ (د ∘ هـ)(٦) ب (هـ ∘ د)(٤) ج (د ∘ د)(−٣)

٢) إذا علمت أن ع : س ← س + ٥ حيث س ∈ ع، س > ٠ ، ل : س ← $\sqrt{س}$ حيث س ∈ ع، س > ٠

فعبّر عن كل دالّة من الدوالّ الآتية (كدوال مركبة)، مستخدمًا الدالّة ع(س) أو الدالّة ل(س) أو كلتَيهما:

أ س ← $\sqrt{س}$ + ٥ ب س ← $\sqrt{س + ٥}$ ج س ← س + ١٠

٣) إذا علمت أن د(س) = أ س + ب حيث س ∈ ع،

وأن د(٥) = ٣، د(٣) = −٣:

أ أوجد قيمة أ وقيمة ب

ب حلّ المعادلة (د ∘ د)(س) = ٤

٤) إذا علمت أن د : س ← ٢س + ٣، حيث س ∈ ع ، هـ : س ← $\frac{١٢}{١ - س}$ حيث، س ∈ ع، س ≠ ١

أ أوجد (هـ ∘ د)(س) إن أمكن ذلك.

ب حلّ المعادلة د(هـ(س)) = ٢ إن أمكن ذلك.

٥) إذا علمت أن هـ(س) = س^{٢} − ٢، حيث س ∈ ع ، ل(س) = ٢س + ٥، حيث س ∈ ع

أ أوجد (هـ ∘ ل)(س).

ب حلّ المعادلة (هـ ∘ ل)(س) = ١٤

٦) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} + ١ حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٣}{س - ٢}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٢

أ أوجد (د ∘ هـ)(س).

ب حلّ المعادلة (د ∘ هـ)(س) = ٥

٧) إذا علمت أن هـ(س) = $\frac{٢}{س + ١}$ حيث س ∈ ع، س ≠ −١ ، ل(س) = (س + ٢)^{٢} − ٥ حيث س ∈ ع

أ أوجد (ل ∘ هـ)(س).

ب حلّ المعادلة (ل ∘ هـ)(س) = ١١

٨) إذا علمت أن د : س ← $\frac{س + ١}{٢}$ حيث س ∈ ع ، هـ : س ← $\frac{٢س + ٣}{س - ١}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ١

حلّ المعادلة (هـ ∘ د)(س) = ١

٩) إذا كانت د(س) = $\frac{س + ١}{٢س + ٥}$ حيث س ∈ ع، س > ٠

فأوجد عبارة جبرية لـ (د ∘ د)(س)، واكتب الناتج في أبسط صورة.

١٠) إذا علمت أن د : س ← س^{٢} حيث س ∈ ع ، هـ : س ← س + ١ حيث س ∈ ع

فاكتب كلّ دالّة من الدوالّ الآتية في صورة دالّة مركّبة، مستخدمًا الدالّة د(س) أو الدالّة هـ(س) أو كلتَيهما:

أ س ← (س + ١)^{٢} ب س ← س^{٢} + ١ ج س ← س + ٢

د س ← س^{٤} هـ س ← س^{٢} + ٢س + ٢ و س ← س^{٤} + ٢س^{٢} + ١

١١) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} − ٣س حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٢س + ٥ حيث س ∈ ع

فبيّن أن المعادلة (هـ ∘ د)(س) = ٠ ليس لها حلول حقيقية.

١٢) إذا علمت أن د(س) = ك − ٢س حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٢}{س}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٠

فأوجد قيم ك ليكون للمعادلة (د ∘ هـ)(س) = س حلّان حقيقيان متساويان.

١٣) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} − ٣س حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٢س − ٥ حيث س ∈ ع

فأوجد قيم ك ليكون للمعادلة (هـ ∘ د)(س) = ك حلول حقيقية.

١٤) إذا علمت أن د(س) = $\frac{س + ٥}{٢س - ١}$ حيث س ∈ ع، س ≠ $\frac{١}{٢}$

فبيّن أن (د ∘ د)(س) = س

١٥) إذا علمت أن د(س)=س^{٢} − ٥س، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ٢س + ٣ حيث س ∈ ع

أ أوجد (د ∘ هـ)(س).

ب أوجد مدى الدالّة (د ∘ هـ)(س).

★ **١٦)** ل(س) = س^{٢} − ١ حيث س ∈ ع

ك(س) = س + ٢ حيث س ∈ ع

ع(س) = $\frac{١}{س}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٠

ي(س) = $\sqrt{س + ١}$ − ١ حيث س ∈ ع، س ≥ −١

تمّ تركيب الدوالّ ل(س)، ك(س)، ع(س)، ي(س) بطريقة ما لتشكيل دالّة جديدة د(س).

في كل حالة من الحالات الآتية، اكتب د(س) بدلالة كل أو مجموعة من الدوالّ ل(س)، ك(س)، ع(س) ي(س)، وحدّد مجال كل دالّة مركّبة ومداها:

أ د(س) = س^{٢} + ٤س + ٣

ب د(س) = س^{٢} + ١

ج د(س) = س

د د(س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ + ١

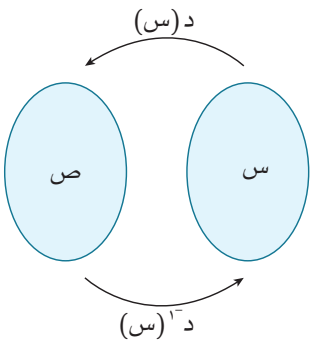
هـ د(س) = $\frac{١}{٤ + س}$

و د(س) = س − ٢$\sqrt{س + ١}$ + ١

٢-٣ الدوالّ العكسيّة

الدالّة العكسية **inverse function** للدالّة د (س) هي الدالّة التي تعكس ما تقوم به الدالّة د (س).

نكتب الدالّة العكسية للدالّة د(س) في صورة $د^{-١}$(س).



نتيجة ٤

$(د \circ د^{-١})(س) = (د^{-١} \circ د)(س) = س$
مجال $د^{-١}$(س) هو مدى د (س)
مدى $د^{-١}$(س) هو مجال د (س)

من المهمّ أن نتذكّر أن ليس لكلّ دالّة دالّة عكسية.

نتيجة ٥

توجد الدالّة العكسية $د^{-١}$(س) إذا كانت الدالّة د (س) واحدًا إلى واحد فقط.

لقد درست سابقًا كيف تجد الدالّة العكسية لبعض الدوالّ واحد إلى واحد البسيطة.

مثلًا، الدالّة العكسية للدالّة س ← ٢س − ١ هي الدالّة $\frac{س + ١}{٢}$

لإيجاد الدالّة $د^{-١}$(س)، إذا افترضنا أن ص = $د^{-١}$(س)، فإن د(ص) = د($د^{-١}$(س)) = س
لأن د(س)، $د^{-١}$(س) دالتان عكسيّتان. وإذا افترضنا أن س = د(ص) ثم أعدنا ترتيبها، فسوف نحصل على ص = ... ويكون الجزء الأيسر هو $د^{-١}$(س).

نجد الدالّة العكسية للدالّة د(س) = ٣س − ١ باتباع الخطوات الآتية:

الخطوة ١: اكتب الدالّة في صورة ص = ← ص = ٣س − ١

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = ٣ص − ١

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← ص = $\frac{س + ١}{٣}$

وعليه، إذا كانت د(س) = ٣س − ١ فإن $د^{-١}$(س) = $\frac{س + ١}{٣}$

نتيجة ٦

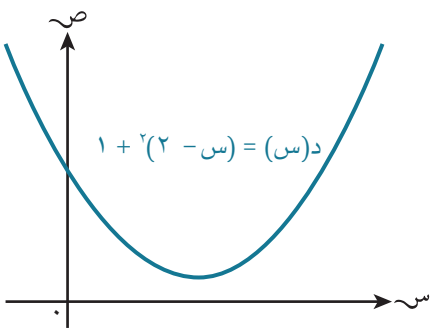
إذا كانت الدالتان د(س)، $د^{-١}$(س) متساويتَين، فتُسمى الدالّة د(س) **بالدالّة العكسية لنفسها** **self-inverse function**.

فمثلًا إذا كان د(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠، فإن $د^{-١}$(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠

وعليه، تكون د(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠ دالّة عكسية لنفسها.

استكشف ٢

يبيّن الشكل المجاور الدالّة د(س) = (س − ٢)^{٢} + ١ حيث س ∈ ع



ناقش الأسئلة الآتية مع أقرانك في الصف:

١) ما نوع العلاقة في هذه الدالّة؟

٢) ما إحداثيات رأس منحنى الدالّة؟

٣) ما مجال الدالّة؟

٤) ما مدى الدالّة؟

٥) هل يوجد دالّة عكسية لهذه الدالّة؟

٦) إذا كان للدالّة د(س) دالّة عكسية، فما معادلتها؟ وإن لم يوجد لها دالّة عكسية، فكيف يمكن أن تغيّر مجالها ليصبح لها دالّة عكسية؟

مثـــال ٥

إذا كانت د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٢}$ − ٧، حيث س ⩽ −٢

أ أوجد د$^{-١}$(س)　　ب حل المعادلة د$^{-١}$(س) = د(٦٢)

الحـــلّ:

أ د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٢}$ − ٧

الخطوة ١: اكتب الدالّة في صورة ص = ← ص = $\sqrt{\text{س} + ٢}$ − ٧

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = $\sqrt{\text{ص} + ٢}$ − ٧

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← س + ٧ = $\sqrt{\text{ص} + ٢}$

(س + ٧)^{٢} = ص + ٢

ص = (س + ٧)^{٢} − ٢

∴ د$^{-١}$(س) = (س + ٧)^{٢} − ٢

ب د(٦٢) = $\sqrt{٦٢ + ٢}$ − ٧ = ١

(س + ٧)^{٢} − ٢ = ١ ..... اكتب المعادلة.

(س + ٧)^{٢} = ٣ ..... بسّط المعادلة وحلها.

س + ٧ = ± $\sqrt{٣}$

س = −٧ ± $\sqrt{٣}$

س = −٧ − $\sqrt{٣}$　أو س = −٧ + $\sqrt{٣}$

مدى الدالّة د(س) هو د(س) ⩽ −٧ وعليه، يكون مجال د$^{-١}$(س) هو س ⩽ −٧

∴ الحلّ الوحيد للمعادلة د$^{-١}$(س) = د(٦٢) هو س = −٧ + $\sqrt{٣}$

مثـــال ٦

إذا كانت د(س) = ٥ − (س − ٢)^{٢} حيث، س ∈ ع، ك ≥ س ≥ ٦

أ حدّد أقلّ قيمة للعدد ك عندما يوجد للدالّة د(س) دالّة عكسية.

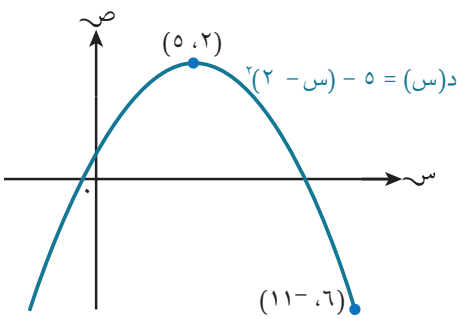
ب أوجد د$^{-١}$(س)، ثم أوجد مجال ومدى الدالّة د$^{-١}$(س) مستخدمًا قيمة ك التي وجدتها في الجزئية (أ).

الحـــلّ:

أ النقطة (٢، ٥) هي رأس منحنى الدالّة ص = ٥ − (س − ٢)^{٢}

عندما س = ٦، فإن ص = ٥ − ٤^{٢} = −١١

يكون للدالّة د(س) دالّة عكسية عندما تكون دالّة واحد إلى واحد.



∴ أقلّ قيمة للثابت ك هي ٢ لأنه عندها تكون الدالّة واحد إلى واحد.

ب د(س) = ٥ − (س − ٢)^{٢}

الخطوة ١: اكتب الدالّة في صورة ص = ← ص = ٥ − (س − ٢)^{٢}

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = ٥ − (ص − ٢)^{٢}

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← (ص − ٢)^{٢} = ٥ − س

ص − ٢ = ± $\sqrt{٥ - س}$

ص − ٢ = $\sqrt{٥ - س}$

ص = ٢ + $\sqrt{٥ - س}$

∴ د$^{-١}$(س) = ٢ + $\sqrt{٥ - س}$

مجال د$^{-١}$(س) يساوي مدى د(س)

∴ مجال د$^{-١}$ هو −١١ ≤ س ≤ ٥

مدى د$^{-١}$(س) يساوي مجال د(س)

∴ مدى د$^{-١}$(س) يساوي ٢ ≤ د$^{-١}$ ≤ ٦

مُساعَدة

اختر الجذر التربيعي الموجب لأن ٢ ≤ د$^{-١}$ (س) ≤ ٦

تمارين ٢-٣

١) أوجد $د^{-١}(س)$ لكلّ دالّة من الدوالّ الآتية إن أمكن ذلك:

أ) $د(س) = ٥س - ٨$ حيث $س \in ع$

ب) $د(س) = س^{٢} + ٣$ حيث $س \in ع$، $س \leq ٠$

ج) $د(س) = (س - ٥)^{٢} + ٣$ حيث $س \in ع$، $س \leq ٥$

د) $د(س) = \frac{٨}{س - ٣}$ حيث $س \in ع$، $س \neq ٣$

هـ) $د(س) = \frac{س + ٧}{س + ٢}$ حيث $س \in ع$، $س \neq -٢$

و) $د(س) = (س - ٢)^{٣} - ١$ حيث $س \in ع$، $س \leq ٢$

٢) إذا كانت $د : س \leftarrow س^{٢} + ٤س$ حيث $س \in ع$، $س \leq -٢$

أ) اكتب مجال ومدى $د^{-١}(س)$

ب) أوجد $د^{-١}(س)$.

٣) إذا كانت $د : س \leftarrow \frac{٥}{٢س + ١}$ حيث $س \in ع$، $س \leq ٢$

أ) أوجد $د^{-١}(س)$.

ب) أوجد مجال $د^{-١}(س)$

٤) إذا كانت $د : س \leftarrow (س + ١)^{٣} - ٤$ حيث $س \in ع$، $س \leq ٠$

أ) أوجد $د^{-١}(س)$.

ب) أوجد مجال $د^{-١}(س)$

٥) إذا كانت $هـ : س \leftarrow ٢س^{٢} - ٨س + ١٠$ حيث $س \in ع$، $س \leq ٣$

أ) وضّح سبب وجود دالّة عكسية للدالّة هـ(س)

ب) أوجد $هـ^{-١}(س)$.

٦) إذا كانت $د : س \leftarrow ٢س^{٢} + ١٢س - ١٤$ حيث $س \in ع$، $س \leq ك$

أ) أوجد أقلّ قيمة للثابت ك بحيث تكون عندها الدالّة د(س) واحدًا إلى واحد.

ب) أوجد $د^{-١}(س)$.

٧) إذا كانت $د : س \leftarrow س^{٢} - ٦س$ حيث $س \in ع$

أ) أوجد مدى الدالّة د(س).

ب) حدّد ما إذا كان للدالّة د دالّة عكسية أم لا، مبررًا ذلك.

٨) إذا كانت $د(س) = ٩ - (س - ٣)^{٢}$ حيث $س \in ع$، $ك \geq س \geq ٧$

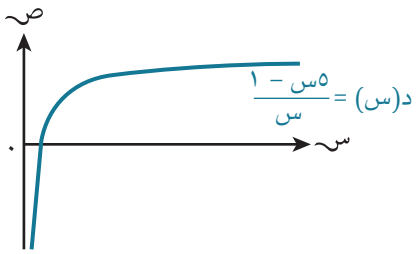
أ) حدّد أقلّ قيمة للثابت ك بحيث تكون الدالّة د(س) واحدًا إلى واحد.

ب) لقيمة ك التي وجدتها في الجزئية (أ):

١) أوجد $د^{-١}(س)$.

٢) حدّد مجال الدالّة $د^{-١}(س)$ ومداها.

٩) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د$^{-١}$(س)،
حيث د$^{-١}$(س) = $\frac{٥س - ١}{س}$ لكل س ∈ ع، ٠ < س ≤ ٣



أ أوجد د(س).

ب حدّد مجال الدالّة د(س).

١٠) إذا علمت أن د(س) = ٣س + أ حيث س ∈ ع ، هـ(س) = ب − ٥س حيث س ∈ ع
فـأوجد قيمة كلّ من أ، ب علمًا بأن (هـ ○ د)(−١) = ٢، هـ$^{-١}$(٧) = ١

١١) إذا علمت أن د(س) = ٣س − ١ حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٣}{٢س - ٤}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٢

أ أوجد كل دالّة من الدالتَين د$^{-١}$(س)، هـ$^{-١}$(س).

ب بيّن أن للمعادلة د$^{-١}$(س) = هـ$^{-١}$(س) جذرَين حقيقيَّين.

١٢) إذا كانت د : س ← (٢س − ١)^{٣} − ٣ حيث س ∈ ع، ١ ≤ س ≤ ٣

أ أوجد د$^{-١}$(س). ب أوجد مجال د$^{-١}$(س).

١٣) إذا كانت د : س ← س^{٢} − ١٠س حيث س ∈ ع، س ≤ ٥

أ اكتب د(س) في صورة (س − أ)^{٢} − ب ب أوجد د$^{-١}$(س) وحدد مجال د$^{-١}$(س)

١٤) إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ١

أ أوجد د$^{-١}$(س).

ب بيّن أنه إذا كان د(س) = د$^{-١}$(س)، فإن س^{٢} − س − ١ = ٠

ج أوجد قيم س حيث د(س) = د$^{-١}$(س). اكتب إجابتك في أبسط صورة.

١٥) حدّد أي دالّة من الدوالّ الآتية هي دالّة عكسية لنفسها:

أ د(س) = $\frac{١}{٣ - س}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٣ ب د(س) = $\frac{٢س + ١}{س - ٢}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٢

ج د(س) = $\frac{٣س + ٥}{٤س - ٣}$ حيث س ∈ ع، س ≠ $\frac{٣}{٤}$

١٦) إذا علمت أن د : س ← ٣س − ٥ حيث س ∈ ع ، هـ : س ← ٤ − ٢س حيث س ∈ ع

أ أوجد (د ○ هـ)$^{-١}$(س).

ب أوجد كل دالّة من الدوالّ الآتية:

١) (د$^{-١}$ ○ هـ$^{-١}$)(س) ٢) (هـ$^{-١}$ ○ د$^{-١}$)(س)

ج فسّر النواتج التي حصلت عليها في الجزئية (ب). تأكد ما إذا كانت هذه النواتج صحيحة لدوالّ أخرى.

٤-٢ منحنى الدالّة ومنحنى دالتها العكسيّة

لتكن الدالّة المعرّفة في صورة د(س) = ٢س + ١ حيث س ∈ ع، −٤ ⩽ س ⩽ ٢

د(−٤) = −٧، د(٢) = ٥

مجال الدالّة د هو −٤ ⩽ س ⩽ ٢ ومداها هو −٧ ⩽ د(س) ⩽ ٥

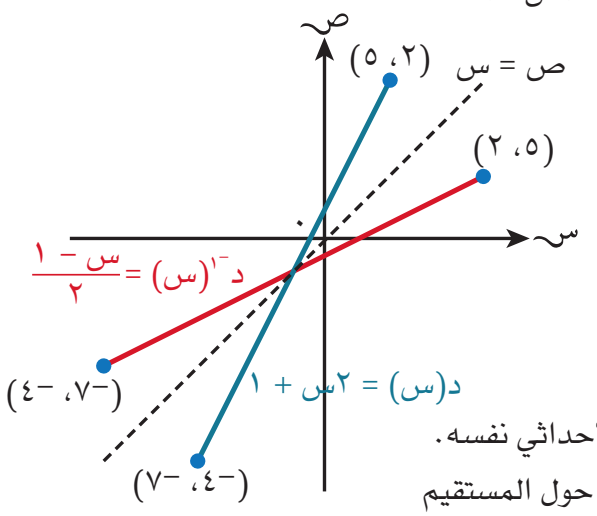
الدالّة العكسية للدالّة د(س) هي $د^{-١}(س) = \frac{س - ١}{٢}$

مجال الدالّة $د^{-١}$(س) هو مدى الدالّة د(س) نفسه.

أي أن مجال $د^{-١}$(س) هو −٧ ⩽ س ⩽ ٥

مدى الدالّة $د^{-١}$(س) هو مجال الدالّة د(س) نفسه.

أي أن مدى الدالّة $د^{-١}$ هو −٤ ⩽ $د^{-١}$(س) ⩽ ٢



يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للدالتَين د، $د^{-١}$ على المستوى الإحداثي نفسه.

من المهمّ أن تلاحظ أن أحد منحنيَي د(س)، $د^{-١}$(س) انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س، ويُعدّ ذلك صحيحًا لجميع الدوالّ واحد إلى واحد ودوالها العكسية.

نتيجة ٧

- منحنيا الدالّتَين د(س)، $د^{-١}$(س) أحدهما انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س
  يحصل ذلك لأن (د ∘ $د^{-١}$)(س) = (س) = س = ($د^{-١}$ ∘ د)(س)
- عندما تكون الدالّة د(س) عكسية لنفسها، يكون منحنى الدالّة د(س) متماثلًا حول المستقيم ص = س

مثـال ٧

إذا كانت د(س) = (س − ١)^{٢} − ٢ حيث س ∈ ع، ١ ⩽ س ⩽ ٤

ارسم منحنى د(س)، ومنحنى الدالّة $د^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه.

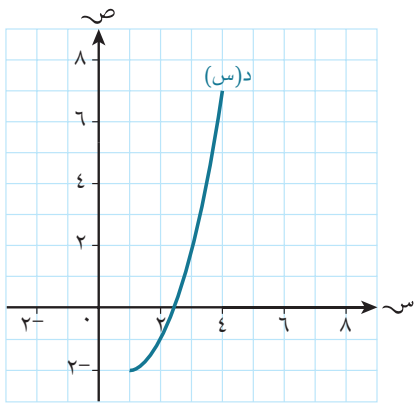
الحـلّ:

ص = (س − ١)^{٢} − ٢

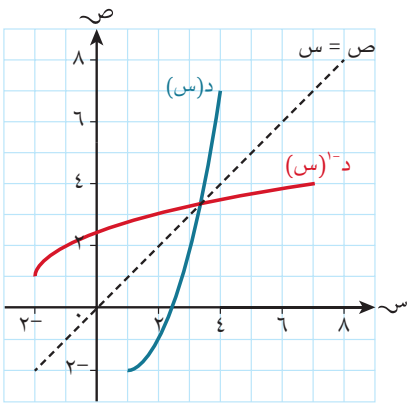
عندما س = ٤، فإن ص = ٧

الدالّة واحد إلى واحد، لذا فإن لها دالّة عكسية.

الجزء (س − ١)^{٢} مربّع كامل، لذا فإنه ⩽ ٠ دائمًا.
وعليه، فإن أصغر قيمة يمكن أن يصل إليها هي صفر.
يحصل ذلك عندما س = ١
رأس منحنى الدالّة عند النقطة (١، −٢).



اعكس د(س) حول المحور ص = س



مثـــال ٨

إذا كانت د : س ← $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٢

أ أوجد $د^{-١}$(س).

ب ماذا تستنتج من الجزئية (أ) عن تماثل المنحنى ص = د(س)؟

الحـــلّ:

أ د : س ← $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

الخطوة ١: اكتب الدالّة في صورة ص = ← ص = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = $\frac{٢ص + ٧}{ص - ٢}$

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← س(ص − ٢) = ٢ص + ٧

س ص − ٢س = ٢ص + ٧

س ص − ٢ص = ٢س + ٧

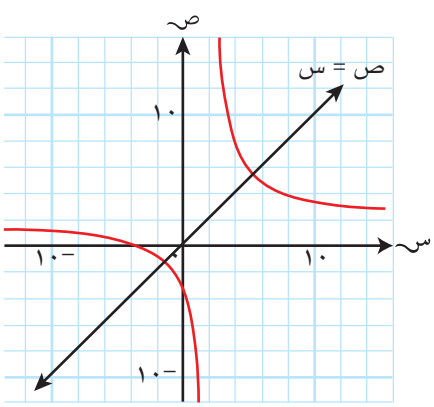
ص(س − ٢) = ٢س + ٧

ص = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

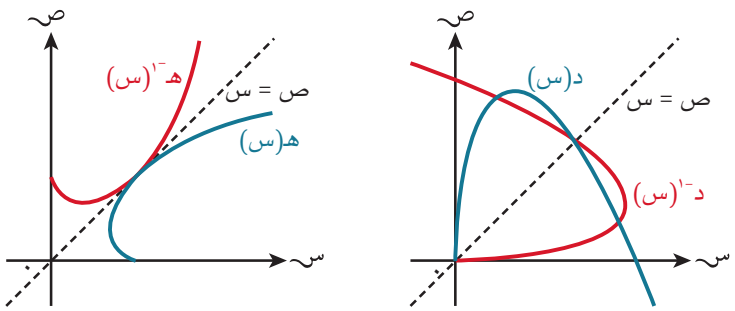
∴ $د^{-١}$(س) = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

ب ∵ $د^{-١}$(س) = د(س)، فإن الدالّة عكسية لنفسها.

منحنى الدالّة متماثل حول المستقيم ص = س



استكشف ٣



تقول شهد ما يأتي:

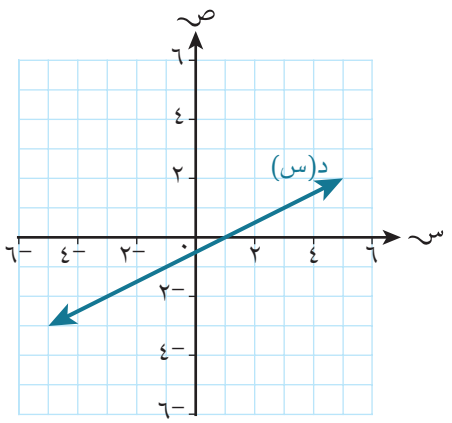
يبيّن الشكلان منحنيَي الدالّتين د(س)، هـ(س) معًا مع معكوس كل منهما د⁻¹(س)، هـ⁻¹(س)

هل ما تقوله شهد صحيح؟ اشرح إجابتك.

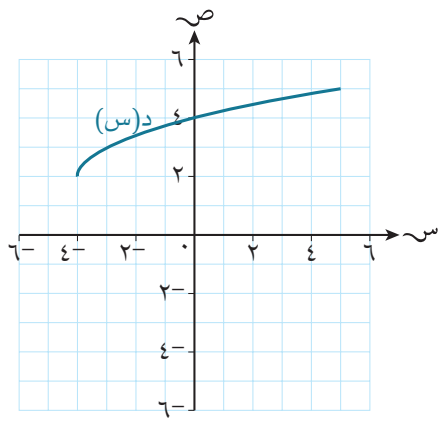
تمارين ٢-٤

١) في كل حالة من الحالات الآتية، انقل الرسم إلى دفترك، وارسم منحنى د⁻¹(س) إن وجد:

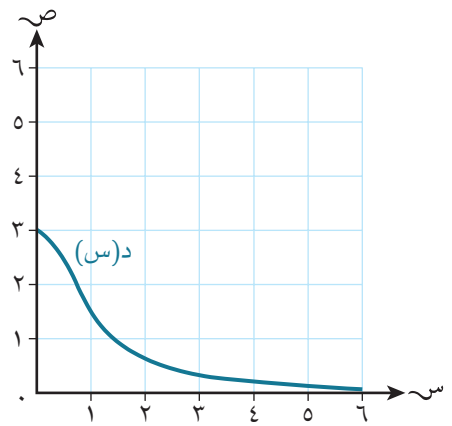
أ



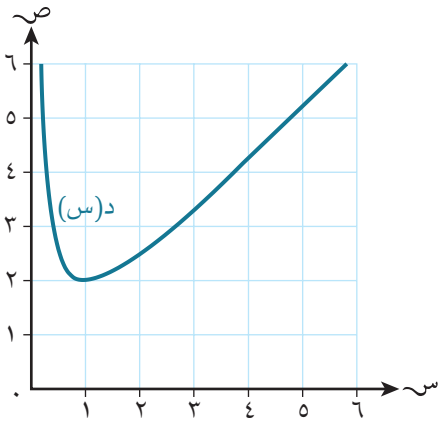
ب



ج



د



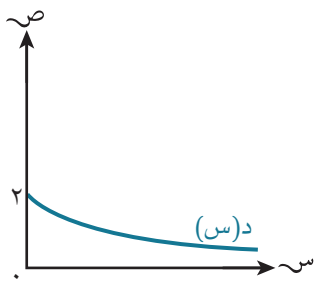
٢) إذا كانت د : س ← ٢س − ١ حيث س ∈ ع، −١ ⩽ س ⩽ ٣

أ أوجد د$^{-١}$(س).

ب حدّد مجال د$^{-١}$(س) ومداها.

ج ارسم على المستوى الإحداثي نفسه منحنى ص = د(س)، ومنحنى ص = د$^{-١}$(س) موضحًا العلاقة بين المنحنيَين.

٣) يبيّن الشكل المجاور منحنى ص = د(س) عندما د(س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ حيث س ∈ ع، س ⩽ ٠



أ حدّد مدى الدالّة د(س)

ب اكتب د$^{-١}$(س).

ج حدّد مجال الدالّة د$^{-١}$(س) واكتب مداها.

د انقل الشكل إلى دفترك وارسم منحنى ص = د$^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه، موضحًا العلاقة بين المنحنيَين.

٤) لكلّ دالّة من الدوالّ الآتية، أوجد د$^{-١}$(س)، ثم قرّر ما إذا كان منحنى ص = د (س) متماثلًا حول المستقيم ص = س أم لا:

أ د(س) = $\frac{س + ٥}{٢س - ١}$ حيث س ∈ ع، س ≠ $\frac{١}{٢}$

ب د(س) = $\frac{٢س - ٣}{س - ٥}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٥

ج د(س) = $\frac{٣س - ١}{٢س - ٣}$ حيث س ∈ ع، س ≠ $\frac{٣}{٢}$

د د(س) = $\frac{٤س + ٥}{٣س - ٤}$ حيث س ∈ ع، س ≠ $\frac{٤}{٣}$

٥) أ إذا كانت د(س) = $\frac{س + أ}{ب س - ١}$ لكل س ∈ ع، س ≠ $\frac{١}{ب}$، حيث أ، ب ثابتان.

بيّن أن الدالّة عكسية لنفسها.

ب إذا كانت د(س) = $\frac{أس + ب}{جـ س + د}$ لكل س ∈ ع، س ≠ − $\frac{د}{جـ}$، حيث أ، ب، جـ، د ثوابت،

فأوجد الشرط لتكون الدالّة د(س) عكسية لنفسها.

٢-٥ التحويلات الهندسيّة للدوالّ

تعلّمت سابقًا، في الصف التاسع، العديد من التحويلات الهندسيّة المختلفة التي يمكن تطبيقها على الأشكال ثنائية الأبعاد، وتتضمّن الانسحاب، والانعكاس، والدوران، والتكبير. في هذا الدرس، سوف تتعلّم كيف تستخدم الانسحاب والانعكاس والتمدّد (وتركيبات من هذه التحويلات الهندسية) على منحنى الدالّة.

٢-٥أ الانسحاب

يبيّن الشكل المجاور منحنيَي دالتَين تختلفان فقط في قيمة الثابت.

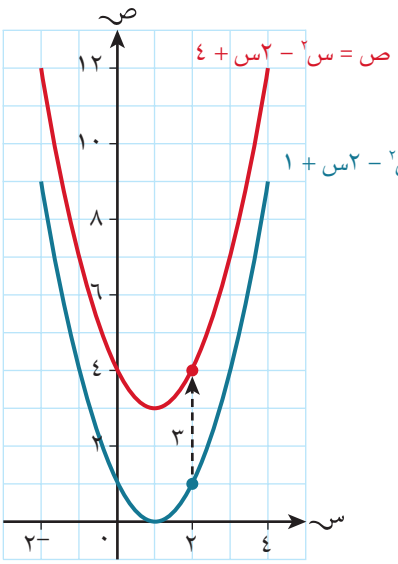
د(س) = س^{٢} − ٢س + ١

د(س) = س^{٢} − ٢س + ٤

عندما تتساوى الإحداثيات السينية للمنحنيَين (س = س)، تختلف الإحداثيات الصادية بمقدار ٣ أي أن (ص = ص + ٣).

هذا يعني أن للمنحنيَين الشكل نفسه، لكنهما متباعدان بمقدار ٣ وحدات بالاتجاه الموجب لمحور الصادات.

وعليه، يمثّل المنحنى د(س) = س^{٢} − ٢س + ٤ انسحابًا للمنحنى د(س) = س^{٢} − ٢س + ١ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$.



نتيجة ٨

منحنى الدالّة ص = د(س) + ب هو انسحاب لمنحنى الدالّة ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ب \end{pmatrix}$.

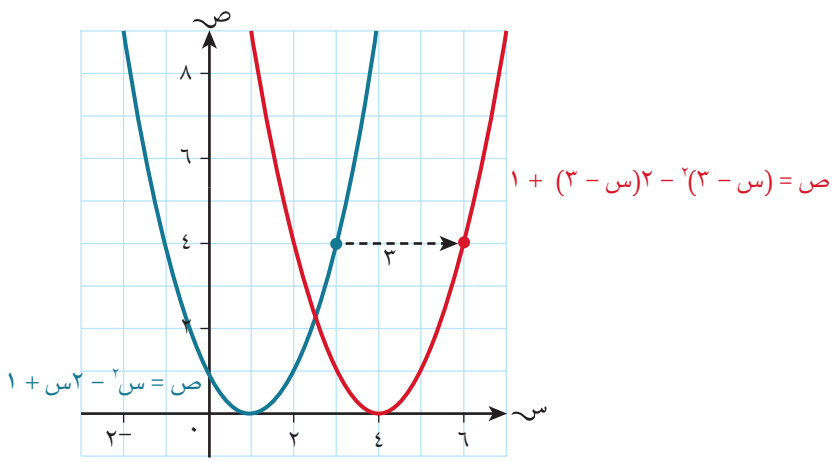
الآن اعتمد الدالّتَين:

ص = س^{٢} − ٢س + ١

ص = (س − ٣)^{٢} − ٢(س − ٣) + ١

نحصل على الدالّة الثانية باستبدال س بـ (س − ٣) في الدالّة الأولى.

منحنيا الدالّتَين هما:



للمنحنيَين شكل واحد لكنهما متباعدان بمقدار ٣ وحدات باتجاه المحور السيني الموجب.
قد تستغرب أن المنحنى تحرّك باتجاه المحور السيني الموجب. لاحظ طريقة الحصول على ص = ص باستبدال س بـ (س − ٣) أو بصورة مكافئة س = س + ٣: هذا يعني أن للمنحنيَين الإحداثي الصادي نفسه (ص = ص) عندما يكون المنحنى الأحمر إلى يمين المنحنى الأزرق بمقدار ٣ وحدات.

لذا فإن المنحنى د(س) = (س − ٣)^{٢} − ٢(س − ٣) + ١ هو انسحاب للمنحنى د(س) = س^{٢} − ٢س + ١ بالمتجه $\begin{pmatrix}٣\\٠\end{pmatrix}$.

نتيجة ٩

منحنى الدالّة ص = د(س − أ) هو انسحاب لمنحنى الدالّة ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix}أ\\٠\end{pmatrix}$.

دمج النتيجتَين أعلاه يعطي:

نتيجة ١٠

منحنى الدالّة ص = د(س − أ) + ب هو انسحاب لمنحنى الدالّة ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix}أ\\ب\end{pmatrix}$.

مثـال ٩

تمّ سحب منحنى الدالّة ص = س^{٢} + ٥س وحدتَين إلى اليمين. أوجد معادلة منحنى الدالّة بعد الانسحاب، اكتب المعادلة في صورة ص = أس^{٢} + ب س + جـ

الحـلّ:

ص = س^{٢} + ٥س ..... استبدل كلّ س بـ (س − ٢).

ص = (س − ٢)^{٢} + ٥(س − ٢) ..... فُكّ وبسِّط.

ص = س^{٢} + س − ٦

مثـال ١٠

تمّ سحب منحنى الدالّة ص = $\sqrt{٢}$س بالمتجه $\begin{pmatrix}-٥\\٣\end{pmatrix}$. أوجد معادلة منحنى الدالّة الناتج.

الحـلّ:

ص = $\sqrt{٢}$س ..... استبدل س بـ (س + ٥)، ثم أضف ٣ على الدالّة الناتجة.

ص = $\sqrt{٢}$(س + ٥) + ٣

ص = $\sqrt{٢}$س + ١٠ + ٣

تمارين ٢-٥أ

١) أوجد معادلة كلٍّ مما يأتي بعد إجراء التحويل الهندسيّ المطلوب:

أ) ص = ٢س^{٢} — بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٤ \end{pmatrix}$

ب) ص = $\sqrt{٥س}$ — بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٢ \end{pmatrix}$

ج) ص = ٧س^{٢} − ٢س — بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ١ \end{pmatrix}$

د) ص = س^{٢} − ١ — بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \end{pmatrix}$

هـ) ص = $\frac{٢}{س}$ — بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$

و) ص = $\frac{س}{س + ١}$ — بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٣ \\ ٠ \end{pmatrix}$

ز) ص = س^{٢} + س — بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

ح) ص = ٣س^{٢} − ٢ — بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$

٢) أوجد متجه الانسحاب الذي يحوّل منحنى الدالّة الأولى إلى منحنى الدالّة الثاني في كل حالة من الحالات الآتية:

أ) ص = س^{٢} + ٥س − ٢ — إلى — ص = س^{٢} + ٥س + ٢

ب) ص = س^{٣} + ٢س^{٢} + ١ — إلى — ص = س^{٣} + ٢س^{٢} − ٤

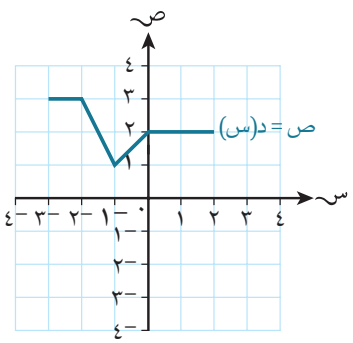
ج) ص = س^{٢} − ٣س — إلى — ص = (س + ١)^{٢} − ٣(س + ١)

د) ص = س + $\frac{٦}{س}$ — إلى — ص = س − ٢ + $\frac{٦}{س - ٢}$

هـ) ص = $\sqrt{٢س + ٥}$ — إلى — ص = $\sqrt{٢س + ٣}$

و) ص = $\frac{٥}{س^{٢}}$ − ٣س — إلى — ص = $\frac{٥}{(س - ٢)^{٢}}$ − ٣س + ١٠

٣) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د(س).



ارسم منحنى كل دالّة من الدوالّ الآتية:

أ) ص = د(س) − ٤

ب) ص = د(س − ٢)

ج) ص = د(س + ١) − ٥

٤) أ) ارسم التمثيل البياني للدالّتَين ص = ٢س، ص = ٢س + ٢ على المستوى الإحداثي نفسه.

ب) يمكن سحب المستقيم ص = ٢س إلى ص = ٢س + ٢ بإجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ أ \end{pmatrix}$. أوجد قيمة أ

ج) يمكن سحب المستقيم ص = ٢س إلى ص = ٢س + ٢ بإجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ب \\ ٠ \end{pmatrix}$. أوجد قيمة ب

٥) إذا كانت ص = (س + ٣) (س − ٢) (س − ٥)، فاكتب معادلتها 'بصورة مشابهة' بعد إجراء انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

٦) تمّ سحب منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٤ س + ١ بالمتجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \end{pmatrix}$.

اكتب معادلة المنحنى الناتج في صورة ص = أس^{٢} + ب س + جـ

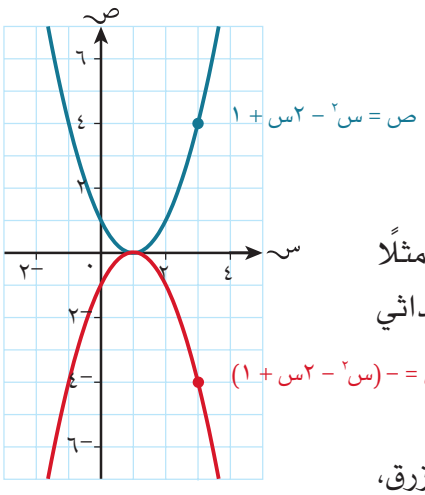
★ **٧)** تمّ سحب منحنى الدالّة ص = أس^{٢} + ب س + جـ بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ -٥ \end{pmatrix}$ فكانت معادلة المنحنى الناتج هي ص = ٢س^{٢} − ١١س + ١٠، أوجد قيمة كلٍّ من: أ، ب، جـ

٢-٥ب الانعكاس

يبيّن الشكل المجاور منحنيَي الدالّتَين:

د(س) = س^{٢} − ٢س + ١

د(س) = − (س^{٢} − ٢س + ١)



عندما تكون الإحداثيات السينية على المنحنيَين متساوية (س = س)، فإن الإحداثيات الصادية لأحدهما هي معكوس الإحداثي الصادي للآخر (ص = − ص) فمثلًا في المنحنى الأزرق، الإحداثي الصادي يساوي ٤ أي أنه في المنحنى الأحمر الإحداثي الصادي يساوي سالب هذا العدد، أي (−٤)

هذا يعني أنه عندما تكون الإحداثيات السينية متساوية، فإن المنحنى الأحمر يكون على البعد الرأسي نفسه أي من المحور السيني كما هي الحال في المنحنى الأزرق، ولكن إلى الجهة المقابلة للمحور السيني.

وعليه، فإن منحنى الدالّة د(س) = − (س^{٢} − ٢س + ١) هو انعكاس لمنحنى الدالّة د(س) = س^{٢} − ٢س + ١ حول المحور السيني.

نتيجة ١١

منحنى الدالّة ص = −د(س) هو انعكاس لمنحنى الدالّة ص = د(س) حول المحور السيني.

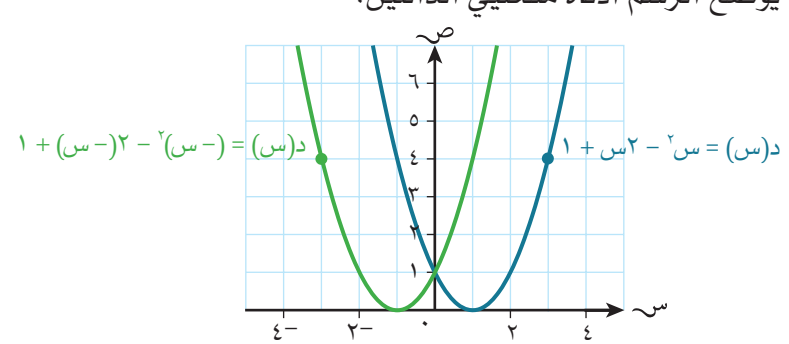
والآن إليك الدالّتَين:

د(س) = س^{٢} − ٢س + ١

د(س) = (− س)^{٢} − ٢(− س) + ١

نحصل على الدالّة الثانية باستبدال س بـ (− س) في الدالّة الأولى.

يوضح الرسم أدناه منحنيَي الدالتَين:



للمنحنيان الإحداثي الصادي نفسه عندما يكون الإحداثي السيني هو س أو − س

هذا يعني أن الإحداثي الصادي للمنحنيَين هو نفسه عندما يكون المنحنى الأخضر على المسافة الأفقية نفسها من المحور الصادي كما هي الحال للمنحنى، ولكن في الجهة المقابلة من المحور الصادي.

وعليه، فإن منحنى د(س) = (− س)^{٢} − ٢(− س) + ١ هو انعكاس لمنحنى د(س) = س^{٢} − ٢س + ١ حول المحور الصادي.

نتيجة ١٢

منحنى الدالّة ص = د(−س) هو انعكاس لمنحنى الدالّة ص = د(س) حول المحور الصادي.

مثـال ١١

لمنحنى الدالّة التربيعية ص = د(س) قيمة صغرى عند النقطة (٥، −٧). أوجد إحداثيات رأس المنحنى وحدّد ما إذا كانت لمنحنى كل دالّة من الدوالّ الآتية نقطة عظمى أو نقطة صغرى:

أ ص = −د(س)　　ب ص = د(−س)

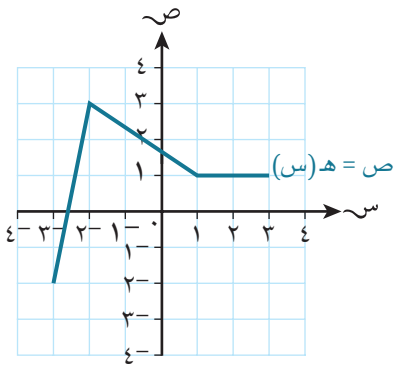
الحـلّ:

أ منحنى ص = −د(س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحور السيني.
نقطة التحوّل هي (٥، ٧)، أي إنها النقطة العظمى.
استبدل الإحداثي الصادي للنقطة بمعكوسه.

ب منحنى ص = د(−س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحور الصادي.
نقطة التحوّل هي (−٥، −٧)، أي إنها النقطة الصغرى.
استبدل الإحداثي السيني للنقطة بمعكوسه.

تمارين ٢-٥ب

١) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = هـ(س).
ارسم منحنى كل دالّة من الدالتَين الآتيتَين:



أ ص = −هـ(س)　　ب ص = هـ(−س)

٢) أوجد معادلة كل دالّة من الدوالّ الآتية بعد إجراء التحويل الهندسي المُعطى:

أ ص = ٥س^{٢} بعد إجراء انعكاس حول المحور السيني.

ب ص = ٢س^{٤} بعد إجراء انعكاس حول المحور الصادي.

ج ص = ٢س^{٢} − ٣س + ١ بعد إجراء انعكاس حول المحور الصادي.

د ص = ٥ + ٢س − ٣س^{٢} بعد إجراء انعكاس حول المحور السيني.

٣) أوجد التحويل الهندسي الذي يحول الدالّة الأولى إلى الدالّة الثانية في كل حالة من الحالات الآتية:

أ ص = س^{٢} + ٧س − ٣　　إلى　　ص = −س^{٢} − ٧س + ٣

ب ص = س^{٢} − ٣س + ٤　　إلى　　ص = س^{٢} + ٣س + ٤

ج ص = ٢س − ٥س^{٢}　　إلى　　ص = ٥س^{٢} − ٢س

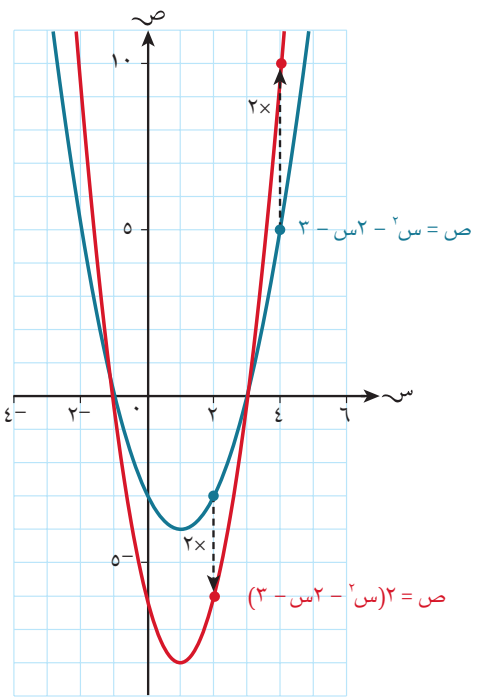
د ص = س^{٣} + ٢س^{٢} − ٣س + ١　　إلى　　ص = − س^{٣} − ٢س^{٢} + ٣س − ١

٢-٥ج التمدّد

يبيّن الشكل المجاور منحنيَي الدالّتَين:

د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

د(س) = ٢(س^{٢} − ٢س − ٣)



عندما يكون الإحداثي السيني على المنحنيَين هو نفسه (س = س) ويكون الإحداثي الصادي على المنحنى الأحمر ضعف الإحداثي الصادي على المنحنى الأزرق (ص = ٢ص)، أي عندما يكون الإحداثيان السينيان متساويَين يكون بُعد المنحنى الأحمر ضعف بُعد المنحنى الأزرق عن المحور السيني.

وعليه، يكون منحنى د(س) = ٢(س^{٢} − ٢س − ٣) تمدّدًا لمنحنى د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ من المحور السيني، ونقول إنه تمدّد بمعامل مقداره ٢ موازيًا للمحور الصادي. يكون التمدد رأسيًّا إذا كان المنحنيان أحدهما فوق الآخر. ولتحديد قيمة معامل التمدد، نجد المسافة الرأسية بين المحور السيني والمنحنى الأول (الأزرق)، ثم المسافة الرأسية بين المحور السيني والمنحنى الثاني (الأحمر)، ثم نقسم المسافتَين إحداهما على الأخرى.

ملاحظة: ثمة طرائق بديلة للتعبير عن هذا التحويل:

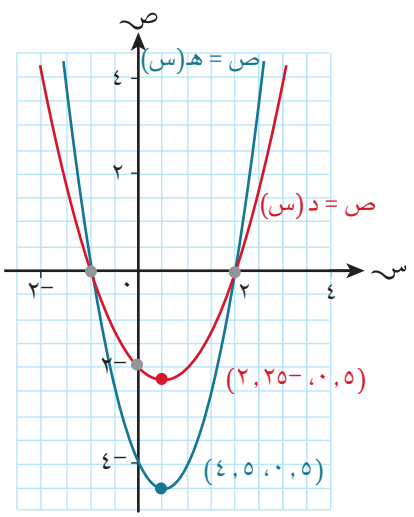
- تمدّد معامله ٢ مع المستقيم ص = ٠
- تمدّد معامله ٢ مع المحور السيني.
- تمدّد معامله ٢ بالنسبة إلى المحور السيني.
- تمدّد رأسي معامله ٢ بعيدًا عن المحور السيني.

مثـال ١٢

يمثّل المنحنيان أدناه الدالّتَين ص = د(س)، ص = هـ(س)

أ أوجِد معادلة د(س).

ب إذا علمت أن هـ(س) تمّ رسمها بتمدد د(س)، فأوجِد معادلة هـ(س).



الحــلّ:

أ تبدو د(س) على هيئة دالّة تربيعية. تمرّ بالمستقيمَين س = −١، س = ٢، لذا نعلم أن (س + ١)، (س − ٢) عاملان.

عند إيجاد ناتج ضرب العاملَين، نحصل على س^{٢} − س − ٢ الذي يقطع المحور الصادي في −٢ كما هو مبيّن في المنحنى.

يعطي الإكمال إلى مربع الناتج $\left(س - \frac{١}{٢}\right)^{٢} - \frac{١}{٤} - ٢$ والتي تعطي إحداثيات النقطة الصغرى $\left(\frac{١}{٢}، -\frac{٩}{٤}\right)$ التي تعرض أيضًا على المنحنى.

وعليه، يظهر أن معادلة المنحنى هي د(س) = س^{٢} − س − ٢

ب يقطع المنحنيان المحور السيني في النقطتَين نفسَيهما، ∴ هذا تمدد في الاتجاه الصادي.

تقع القيمة الصغرى لمنحنى هـ(س) على مسافة تساوي ضعف المسافة التي تقع فيها النقطة الصغرى للدالّة د(س)، أي أن معامل التمدد يساوي ٢

∴ هـ(س) = ٢د(س) = ٢س^{٢} − ٢س − ٤

نتيجة ١٣

منحنى الدالّة ص = أ د(س) هو تمدّد لمنحنى الدالّة ص = د(س) بمعامل تمدّد مقداره (أ) موازيًا للمحور الصادي.

ملاحظة: إذا كان أ < ٠، فإن ص = أد(س) يُعدّ تمدّدًا لـ ص = د(س) بمعامل سالب أو تمدّد معامله موجب، متبوعًا بانعكاس حول المحور السيني.

الآن إليك الدالّتَين الآتيتَين:

د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣

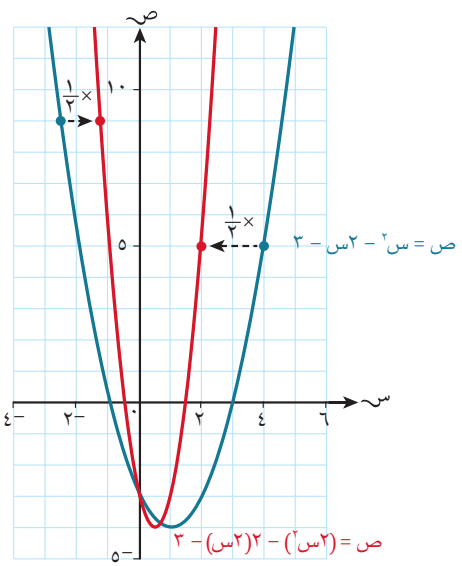
د(س) = (٢س)^{٢} − ٢(٢س) − ٣

نحصل على الدالّة الثانية باستبدال س بـ (٢س) في الدالّة الأولى.

للدالّتَين الإحداثي الصادي نفسه (ص = ص) عندما س = ٢س أو س = $\frac{١}{٢}$ س

هذا يعني أن الإحداثي الصادي للمنحنيَين هو نفسه عندما تكون إزاحة المنحنى الأحمر نصف الإزاحة الأفقية للمنحنى الأزرق من المحور الصادي.

وعليه، يمثّل منحنى د(س) = (٢س)^{٢} − ٢(٢س) − ٣ تمدّدًا لمنحنى د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ من المحور الصادي. نقول إنه تمدّد بمعامل تمدّد مقداره $\frac{١}{٢}$ موازيًا للمحور السيني إذا تم تمدّده أفقيًّا.



نتيجة ١٤

منحنى الدالّة ص = د(أ س) هو تمدّد لمنحنى الدالّة ص = د(س) معامله $\left(\frac{١}{أ}\right)$ وموازٍ للمحور السيني.

مثـــال ١٣

تمّ تمديد منحنى الدالّة ص = ٥ − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} بتمدّد معامله ٤ موازيًا للمحور الصادي. اكتب معادلة المنحنى الناتج.

الحـــلّ:

لتكن ص = ٥ − $\frac{١}{٢}$ س^{٢} ..... يعطي التمدّد الموازي للمحور الصادي بمعامل ٤ الدالّة ٤ص.

٤ص = ٢٠ − ٢س^{٢}

معادلة المنحنى الناتج هي ص = ٢٠ − ٢س^{٢}

مثـــال ١٤

صِف التحويل الوحيد الذي يحوّل منحنى الدالّة ص = س^{٢} − ٣س − ٥ إلى المنحنى ص = ٤س^{٢} − ٦س − ٥

الحـــلّ:

لتكن د(س) = س^{٢} − ٣س − ٥ ..... اكتب ٤س^{٢} − ٦س − ٥ بدلالة د(س).

٤س^{٢} − ٦س − ٥ = (٢س)^{٢} − ٣(٢س) − ٥

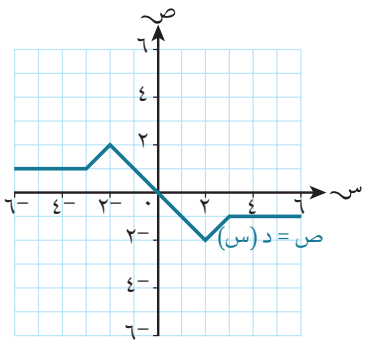
= د(٢س)

التحويل هو تمدّد معامله $\frac{١}{٢}$ وموازٍ للمحور السيني.

تمارين ٢-٥ج

١) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د (س).
ارسم منحنى كل دالّة من الدالّتَين الآتيتَين:

أ ص = ٣ د(س). ب ص= د(٢س).



٢) أوجد صورة كل دالّة من الدوالّ الآتية بعد إجراء التحويل المعطى:

أ ص = ٣س^{٢} بعد تمدّد موازٍ للمحور الصادي معامله ٢

ب ص= س^{٣} − ١ بعد تمدّد موازٍ للمحور الصادي معامله ٣

ج ص = ٢^{س} + ٤ بعد تمدّد موازٍ للمحور الصادي معامله $\frac{١}{٢}$

د ص = ٢س^{٢} − ٨ س + ١٠ بعد تمدّد موازٍ للمحور السيني معامله ٢

هـ ص = ٦س^{٣} − ٣٦س بعد تمدّد موازٍ للمحور السيني معامله $\frac{١}{٣}$

٣) في كل حالة من الحالات الآتية، صِف التحويل الذي يحوّل المنحنى الأول إلى المنحنى الثاني:

أ ص = س^{٢} + ٢س − ٥ إلى ص = ٤س^{٢} + ٤س − ٥

ب ص = س^{٢} − ٣س + ٢ إلى ص = ٣س^{٢} − ٩س + ٦

ج ص = ٢^{س} + ١ إلى ص = ٢$^{س+١}$ + ٢

د ص = $\sqrt{س - ٦}$ إلى ص = $\sqrt{٣س - ٦}$

٦-٢ تركيب التحويلات الهندسيّة

سوف تتعلّم في هذا الدرس كيف تطبّق تركيب تحويلات هندسية بسيطة.

يمكن تصنيف التحويلات الهندسية لمنحنى ص = د(س) التي درستها حتى الآن كتحويلات رأسية أو أفقية.

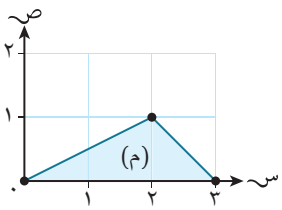
التحويلات الهندسية الرأسية	
ص = د(س) + أ	انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\أ\end{pmatrix}$
ص = − د(س)	انعكاس حول المحور السيني
ص = أ د(س)	تمدّد رأسي معامله أ

التحويلات الهندسية الأفقية	
ص = د(س + أ)	انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-أ\\٠\end{pmatrix}$
ص = د(−س)	انعكاس حول المحور الصادي
ص = د(أس)	تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{أ}$

عند تطبيق تركيب التحويلات الهندسيّة، يجب الانتباه إلى ترتيب إجراء هذه التحويلات.

استكشف ٤

أجرِ التحويلات الهندسيّة على المثلث (م) بالترتيب المعطى، ووضّح فيما إذا كانت الصورة النهائية هي نفسها الصورة الأصلية، أو أنها تختلف عنها.



١) تركيب تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين

أ ١) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٣\end{pmatrix}$، ثم تمدّد رأسي بمعامل $\frac{١}{٢}$

٢) تمدّد رأسي بمعامل $\frac{١}{٢}$، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٠\\٣\end{pmatrix}$

ب حاول مع أزواج أخرى من التحويلات الهندسيّة الرأسية.

٢) تركيب تحويلَين هندسيَّين أحدهما رأسي والآخر أفقي

أ ١) انعكاس حول المحور السيني، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-٢\\٠\end{pmatrix}$

٢) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}-٢\\٠\end{pmatrix}$، ثم انعكاس حول المحور السيني.

ب حاول مع أزواج أخرى من التحويلات الهندسيّة، حيث أحدهما رأسي والآخر أفقي.

٣) تركيب تحويلَين هندسيَّين أفقيَّين

أ ١) تمدّد أفقي معامله ٢ ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٢\\٠\end{pmatrix}$

٢) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix}٢\\٠\end{pmatrix}$، ثم تمدّد أفقي معامله ٢

ب حاول مع أزواج أخرى من التحويلات الهندسيّة الأفقية.

ستجد من النشاط في فقرة 'استكشف ٤' أن:

نتيجة ١٥

- عند تركيب تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين أو أفقيَّين، فإن ترتيب إجرائهما قد يؤثّر على الناتج.
- عند تركيب تحويلَين هندسيَّين أحدهما أفقي والآخر رأسي، فإن ترتيب إجرائهما لا يؤثّر على الناتج.

تركيب تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين

لتحويل منحنى الدالّة ص = د(س) إلى منحنى الدالّة ص = أ د(س) + ك

نتّبع المخطّط الآتي:

د(س) ← تمدّد رأسي معامله أ (اضرب الدالّة في أ) ← أ د(س) ← انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} 0 \\ ك \end{pmatrix}$ (أضف ك إلى الدالّة) ← أ د(س) + ك

يؤدّي ذلك إلى النتيجة المهمّة الآتية:

نتيجة ١٦

تتبع التحويلات الرأسية ترتيب العمليات الحسابية نفسه.

تركيب تحويلَين هندسيَّين أفقيَّين

لتحويل منحنى الدالّة ص = د(س) إلى منحنى الدالّة ص = د(ب س + جـ). نتّبع المخطط الآتي:

د(س) ← انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -جـ \\ 0 \end{pmatrix}$ (استبدل س بـ (س + جـ)) ← د(س + جـ) ← تمدّد أفقي معامله $\frac{1}{ب}$ (استبدل س بـ (ب س)) ← د(ب س + جـ)

يؤدّي ذلك إلى النتيجة المهمّة الآتية:

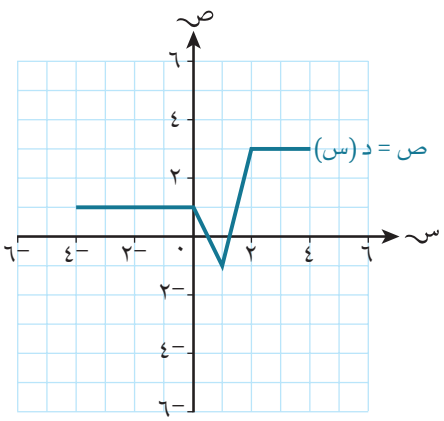
نتيجة ١٧

تتبع التحويلات الهندسيّة الأفقية الترتيب المعاكس لترتيب العمليات الحسابية.

مثـــال ١٥

يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د (س).

ارسم منحنى الدالّة ص = ٢د (س) − ٣



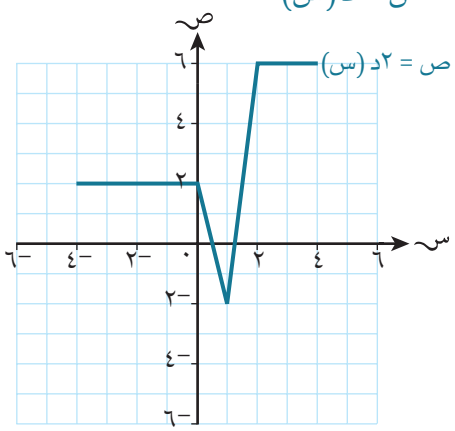
الحـــلّ:

ص = ٢د (س) − ٣ هو تركيب لتحويلَين هندسيَّين رأسيَّين لمنحنى الدالّة ص = د (س).

وعليه، تتبع التحويلات الهندسيّة ترتيب العمليات الحسابية نفسه.

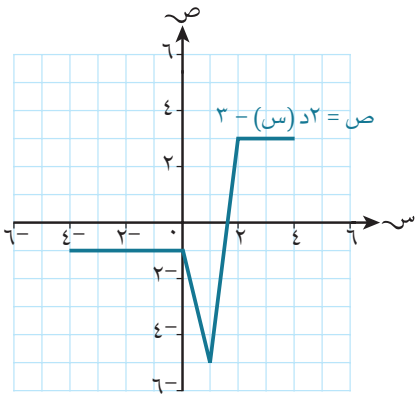
الخطوة ١: ارسم منحنى ص = ٢د (س).

مدّد منحنى الدالّة ص = د (س) رأسيًا بمعامل مقداره ٢



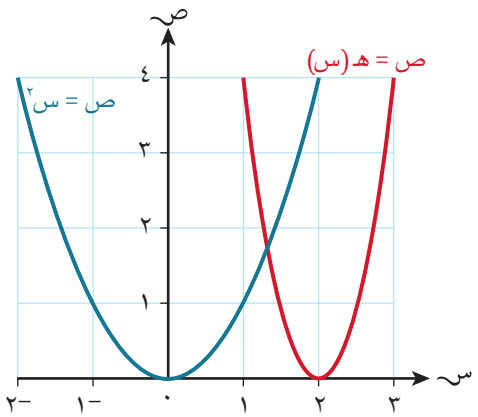
الخطوة ٢: ارسم منحنى ص = ٢د (س) − ٣

اسحب ص = ٢د (س) بالمتجه $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.



مثـــال ١٦

يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = س^{٢} وصورته ص = هـ(س) بعد إجراء تركيب من التحويلات الهندسيّة.

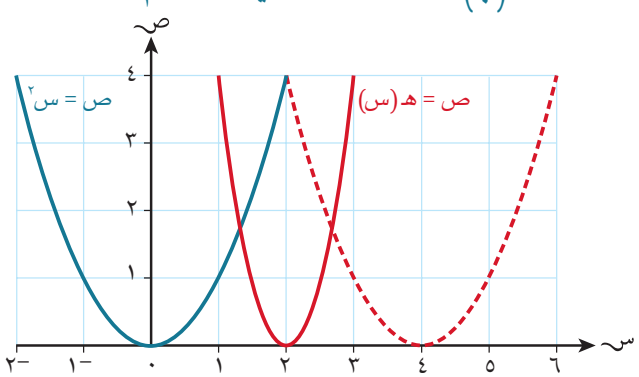


أ أوجد طريقتَين مختلفتَين لتصف تركيب التحويلات الهندسيّة.

ب اكتب المعادلة التي تمثّل منحنى الدالّة ص = هـ(س).

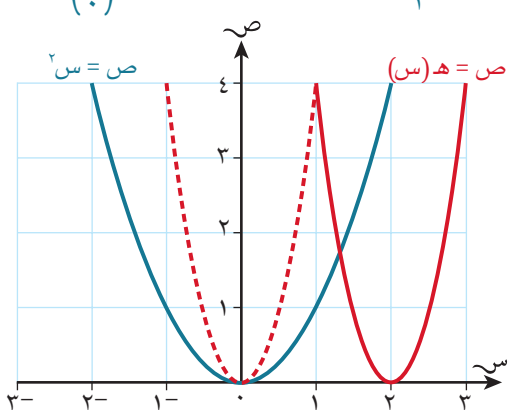
الحـــلّ:

أ انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$، يتبعه تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{٢}$



أو

تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{٢}$، يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$.



ب باستخدام التركيب الأول للتحويلات الهندسيّة:

انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$ يعني استبدال س بـ (س − ٤)

ص = س^{٢} تصبح ص = (س − ٤)^{٢}

تمدّد أفقي معامله $\frac{١}{٢}$ يعني استبدال س بـ (٢س)

ص = (س − ٤)^{٢} تصبح ص = (٢س − ٤)^{٢}

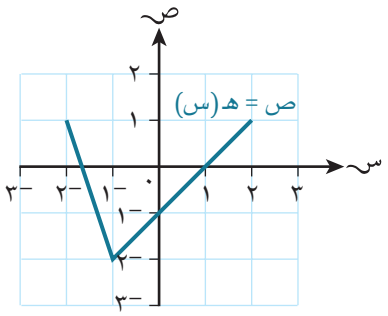
∴ هـ (س) = (٢س − ٤)^{٢}

مُساعَدة

نحصل على الإجابة نفسها عند استخدام التركيب الثاني من التحويلات الهندسيّة. يمكنك أن تتحقق من ذلك بنفسك.

تمارين ٢-٦

١) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = هـ(س).
ارسم منحنى كلّ دالّة من الدوالّ الآتية:



أ) ص = هـ(س + ٢) + ٣
ب) ص = ٢هـ(س) + ١
ج) ص = ٢ − هـ(س)
د) ص = ٢هـ(−س) + ١
هـ) ص = −٢هـ(س) − ١
و) ص = هـ(٢س) + ٣
ز) ص = هـ(٢س − ٦)
ح) ص = هـ(−س + ١)

٢) إذا كان ص = س^{٢}، فأوجد صورة منحنى الدالّة ص = س^{٢} بعد كل تركيب من التحويلات الهندسيّة الآتية:

أ) تمدّد رأسي معامله ٣ يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

ب) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$ يتبعه تمدّد رأسي معامله ٣

٣) أوجد معادلة صورة منحنى الدالّة ص = س^{٢} بعد كل تركيب من التحويلات الهندسيّة الآتية، وارسم المنحنى الناتج في كل حالة:

أ) تمدّد أفقي معامله ٢ يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

ب) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٠ \end{pmatrix}$ يتبعه تمدّد أفقي معامله ٢

ج) مثّل على المستوى الإحداثي نفسه ص = س^{٢} وما حصلت عليه في الجُزئيَّتَين (أ)، (ب).

٤) إذا علمت أن د(س) = س^{٢} + ١، فأوجد صورة ص = د(س) بعد كل تركيب من التحويلات الهندسيّة الآتية:

أ) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ -٥ \end{pmatrix}$ يتبعه تمدّد موازٍ للمحور الصادي معامله ٢

ب) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$ يتبعه انعكاس حول المحور السيني.

٥) أ) انعكاس منحنى الدالّة ص = هـ (س) حول المحور الصادي، ثم إتباع بتمدّد معامله ٢ موازيًا للمحور الصادي. اكتب معادلة المنحنى الناتج.

ب) انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ -٣ \end{pmatrix}$، ثم انعكاس حول المحور السيني. اكتب معادلة المنحنى الناتج.

٦) حدّد تركيب التحويلات الهندسيّة الذي يحوّل ص = د(س) إلى كل دالّة من الدوالّ الآتية:

أ ص = $\frac{١}{٢}$ د(س) + ٣ ب ص= −د(س) + ٢

ج ص = د(٢س − ٦) د ص= ٢د(س) − ٨

٧) حدّد تركيب التحويلات الهندسيّة الذي يحوّل:

أ منحنى الدالّة ص = س^{٣} إلى منحنى الدالّة ص = $\frac{١}{٢}$(س + ٥)^{٣}

ب منحنى الدالّة ص = س^{٣} إلى منحنى الدالّة ص = −$\frac{١}{٢}$(س + ١)^{٣} − ٢

ج منحنى الدالّة ص = $\sqrt{س}^{٣}$ إلى منحنى الدالّة ص = −٢$\sqrt{س - ٣}^{٣}$ + ٤

٨) إذا علمت أن الدالّة د(س) = $\sqrt{س}$ فاكتب معادلة في صورة د(س) في كل حالة من الحالات الآتية بعد إجراء:

أ انعكاس حول المحور السيني، يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$، ثم يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$، ثم تمدّد موازٍ للمحور السيني معامله ٢

ب انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٣ \end{pmatrix}$، يتبعه تمدّد موازٍ للمحور السيني معامله ٢، ثم يتبعه انعكاس حول المحور السيني، ثم انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

٩) إذا علمت أن الدالّة هـ(س) = س^{٢}، فاكتب معادلة صورة هـ(س) بعد إجراء:

أ انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$، ثم يتبعه انعكاس حول المحور الصادي، ثم يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \end{pmatrix}$، ثم يتبعه تمدّد مواز للمحور الصادي معامله ٣

ب تمدّد مواز للمحور الصادي معامله ٣، يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٢ \end{pmatrix}$، ثم يتبعه انعكاس حول المحور الصادي، ثم يتبعه انسحاب بالمتجه $\begin{pmatrix} -٤ \\ ٠ \end{pmatrix}$.

★ **١٠)** أوجد طريقتَين مختلفتَين لوصف تركيب التحويلات الهندسيّة التي تحوّل منحنى الدالّة د(س) = $\sqrt{س}$ إلى منحنى الدالّة هـ(س) = $\sqrt{-س - ٣}$ وارسم منحيَي الدالّتَين ص = د(س)، ص = هـ(س).

★ **١١)** أوجد طريقتَين مختلفتَين لوصف تركيب التحويلات الهندسيّة التي تحوّل منحنى الدالّة ص = د(س) إلى المنحنى ص = د(٢س + ١٠).

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

الدوالّ

- العلاقة هي ارتباط بين عناصر مجموعة ما بعناصر مجموعة أخرى.
  الدالّة هي علاقة بين عناصر مجموعتين، حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.
  جميع الدوالّ عبارة عن علاقات، لكن ليست كل علاقة دالّة.
- قد تكون الدالّة واحدًا إلى واحد أو متعدّدًا إلى واحد.
- تُسمّى مجموعة المدخلات مجال الدالّة.
- تُسمّى مجموعة المخرجات مدى الدالّة.

الدوالّ المركبّة

- (د ○ هـ)(س) تعني تطبيق الدالّة هـ(س) على س أولًا، ثم تطبيق د(س) على الناتج.
- يمكن إيجاد (د ○ هـ)(س) فقط عندما يكون مدى هـ(س) مجموعة جزئية من مجال د(س)
- ليس من الضروري أن تكون (د ○ هـ)(س) = (هـ ○ د)(س) صحيحة لجميع الدوالّ.

الدوالّ العكسية

- الدالّة العكسية للدالّة د(س) هي دالّة تلغي ما تقوم به الدالّة د(س).
  (د ○ د)$^{-1}$(س) = (د$^{-1}$ ○ د)(س) = س أو إذا كانت ص = د(س) فإن س = د$^{-1}$(ص).
- تكتب الدالّة العكسية للدالّة د(س) في صورة د$^{-1}$(س).
- خطوات إيجاد الدالّة العكسية هي:
  الخطوة ١: استبدال د(س) بالمتغير ص
  الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص
  الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س
- مجال د$^{-1}$(س) هو مدى د(س).
- مدى د$^{-1}$(س) هو مجال د(س).
- توجد الدالّة العكسية د$^{-1}$(س) إذا، كانت الدالّة د(س) واحدًا إلى واحد فقط.
- منحنى د$^{-1}$(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) حول المستقيم ص = س
- إذا كان د(س) = د$^{-1}$(س) فتسمّى الدالّة د(س) عكسية لنفسها.
- إذا كانت الدالّة د عكسية لنفسها، فإن (د ○ د)(س) = س
- يكون منحنى الدالّة العكسية لنفسها متماثلًا حول المستقيم ص = س

التحويلات الهندسيّة للدوال

- منحنى ص = د(س) + ب هو انسحاب لمنحنى ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} 0 \\ ب \end{pmatrix}$.
- منحنى ص = د(س + أ) هو انسحاب لمنحنى ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} -أ \\ 0 \end{pmatrix}$.
- منحنى ص = د(س + أ) + ب هو انسحاب لمنحنى ص = د(س) بالمتجه $\begin{pmatrix} أ \\ ب \end{pmatrix}$.
- منحنى ص = − د(س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحور السيني.
- منحنى ص = د(−س) هو انعكاس لمنحنى ص = د(س) حول المحورالصادي.
- منحنى ص = أ د(س) هو تمدّد لمنحنى ص = د(س) معامله (أ) وموازٍ للمحور الصادي.
- منحنى ص = د(أ س) هو تمدّد لمنحنى ص = د(س) معامله $\left(\frac{١}{أ}\right)$ وموازٍ للمحور السيني.

تركيب التحويلات الهندسيّة

- عند تركيب تحويلَين هندسيَّين رأسيَّين أو تحويلَين أفقيَّين، فإن ترتيب إجرائهما قد يؤثّر على الناتج.
- عند تركيب تحويلَين هندسيَّين أحدهما أفقي والآخر رأسي، فإن ترتيب إجرائهما لا يؤثّر على الناتج.
- تتبع التحويلات الهندسيّة الرأسية ترتيب العمليات الحسابية نفسه.
- تتبع التحويلات الهندسيّة الأفقية معكوس ترتيب العمليات الحسابية.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثانية

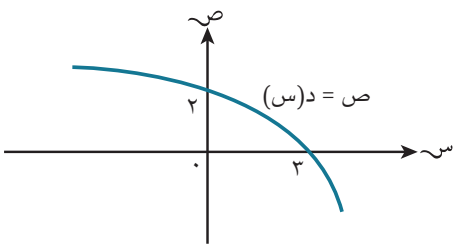
١) إذا علمت أن الدالّتَين د(س)، هـ(س) معرّفتان على س ∋ ع كما يأتي:

د: س ← ٣س − ١

هـ: س ← ٥س − س^{٢}

فاكتب (هـ ○ د)(س) في صورة أ − ب(س − جـ)^{٢} حيث أ، ب، جـ ثوابت.

٢) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة ص = د(س).



أ ارسم منحنى ص = − د($\frac{١}{٢}$ س).

ب أوجد تحويلَين هندسيَّين يحوّلان منحنى ص = د(س) إلى الدالّة ص = د(٣ − س).

٣) منحنى معادلته ص = س^{٢} + ٦س + ٨

أ ارسم المنحنى واكتب إحداثيات نقاط التقاطع مع المحورَين.

ب تمّ سحب المنحنى بالمتجه $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٠ \end{pmatrix}$، ثم أُتبِع بتمدّد رأسي معامله ٣

أوجد معادلة المنحنى الناتج في صورة ص = أ س^{٢} + ب س

٤) الدالّة د: س ← س^{٢} − ٤ معرّفة على المجال س ≤ ٠

أ أوجد د$^{-١}$(س) وحدّد مجال الدالّة د$^{-١}$(س).

ب ارسم منحنى د(س) ومنحنى د$^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه.

★ **٥)** أ اكتب −س^{٢} + ٦س − ٥ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ حيث أ، ب، جـ ثوابت.

الدالّة د: س ← −س^{٢} + ٦س − ٥ معرّفة على س ≤ م، حيث م ثابت.

ب حدّد أصغر قيمة للثابت م لتصبح الدالّة د(س) دالّة واحد إلى واحد.

ج عندما م = ٥، أوجد د$^{-١}$(س) وحدّد مجال د$^{-١}$(س).

★ **٦)** الدالّة د: س ← س^{٢} − ٤س + ك معرّفة على س ≤ ل، حيث ل، ك ثابتان.

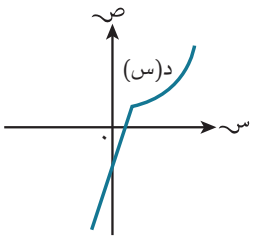
أ اكتب د(س) في صورة (س + أ)^{٢} + ب + ك، حيث أ، ب ثابتان.

ب حدّد مدى الدالّة بدلالة ك

ج حدّد أصغر قيمة للثابت (ل) لتصبح د(س) دالّة واحد إلى واحد.

د لقيمة (ل) التي أوجدتها في الجزئية (ج)، أوجد د$^{-١}$(س) وحدّد مجال د$^{-١}$(س) بدلالة ك

٧) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالّة د(س) حيث $-١ \leqslant س \leqslant ٤$



$$د(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & ، \quad -١ \leqslant س \leqslant ١ \\ \dfrac{٤}{٥ - س} & ، \quad ١ < س \leqslant ٤ \end{cases}$$

أ) حدّد مدى الدالّة د(س).

ب) انسخ الشكل وارسم عليه منحنى ص = د$^{-١}$(س).

ج) اكتب د$^{-١}$ واكتب مجالها.

٨) إذا علمت أن الدالّة د(س) = ٤س^{٢} − ٢٤س + ١١ معرّفة على س ∋ ع

أ) اكتب د(س) في صورة أ(س − ب)^{٢} + جـ، محدّدًا إحداثيات رأس المنحنى ص = د(س).

ب) الدالّة هـ (س) = ٤س^{٢} − ٢٤س + ١١ معرّفة على س $\geqslant$ ١

حدّد مدى الدالّة هـ(س).

ج) أوجد هـ$^{-١}$(س) وحدّد مجالها.

٩) أ) اكتب ٢س^{٢} − ١٢س + ١٣ في صورة أ (س + ب)^{٢} + جـ، حيث أ، ب، جـ ثوابت.

ب) الدالّة د(س) = ٢س^{٢} − ١٢س + ١٣ معرّفة لكل س $\leqslant$ ك، حيث ك ثابت. إذا علمت أن د(س) دالّة واحد إلى واحد، فأوجد أصغر قيمة ممكنة للثابت ك

أوجد قيمة كلٍّ ممّا ياتي عندما ك = ٧

ج) مدى الدالّة د(س).

د) د$^{-١}$(س) وحدّد مجالها.

١٠) إذا كانت الدالة د(س) = س^{٢} − ٢س − ١٥ معرّفة على ل $\geq$ س $\geq$ ك، حيث ل، ك ثابتان موجبان.

ومداها د هو جـ $\geq$ د(س) $\geq$ حـ، حيث جـ، حـ ثابتان.

أ) اكتب الدالة د(س) في صورة (س + أ)^{٢} + ب

ب) حدّد أصغر قيمة للثابت جـ

ج) إذا علمت ان جـ = ٩، حـ = ٦٥:

١) أوجد قيمة كل من ل، ك

٢) أوجد د$^{-١}$(س).

١١) إذا كانت الدالّة د : س ← س^{٢} + ٤س − ٥ معرّفة على س ∋ ع

أ) اكتب د(س) في صورة أ(س − ب)^{٢} − جـ

ب) حدّد مدى د(س).

ج) أوجد مجموعة قيم س حيث د(س) > ١٦

الدالّة هـ: س ↦ ٢س + ك معرّفة على س ∋ ع

د) أوجد قيمة الثابت ك بحيث يكون للمعادلة (هـ ○ د)(س) = ٠ جذران موجبان.

١٢) إذا علمت أن الدالّتَين د(س)، هـ(س) معرّفتان على س ∋ ع كالآتي:

د : س ← ٢س + ١

هـ: س ← س^{٢} − ٢

أ) أوجد عبارة كلّ من الدالّتَين (د ○ هـ)(س)، (هـ ○ د)(س) وبسّط الناتجَين.

ب) أوجد قيمة أ حيث (د ○ هـ)(أ) = (هـ ○ د)(أ).

ج) أوجد قيم ب (ب ≠ أ) حيث هـ(ب) = ب

د) أوجد (د$^{-١}$ ○ هـ)(س) وبسِّطها.

هـ) إذا كانت الدالّة ع: س ← س^{٢} − ٢ معرّفة حيث س ⩾ ٠، فأوجد ع$^{-١}$(س).

١٣) إذا علمت أن الدالّتين د(س)، هـ(س) معرّفتان على النحو:

د : س ← ٢س^{٢} − ٨س + ١٠ حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٢

هـ: س ← س حيث ٠ ⩽ س ⩽ ١٠

أ) اكتب د(س) في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ حيث أ، ب، جـ ثوابت.

ب) حدّد مدى الدالّة د(س).

ج) حدّد مجال الدالّة د$^{-١}$(س).

د) ارسم في المستوى الإحداثي نفسه المنحنيات ص = د(س)، ص = هـ(س)، ص = د$^{-١}$(س)، موضحًا العلاقة بين المنحنيات.

هـ) أوجد د$^{-١}$(س).

١٤) إذا كانت د(س) = س^{٢} − ٤س + ٢، حيث س ∋ ع ، حيث س ⩽ ك

أ) اكتب ٢س^{٢} + ٤س − ٨ في صورة أ(س + ب)^{٢} + جـ

ب) أوجد أصغر قيمة للعدد ك بحيث تكون الدالّة واحدًا إلى واحد.

١٥) إذا كانت د(س) = س^{٢} − ٢س + ٤، حيث س ∋ ع

أ) أوجد قيم س عندما د(س) ⩽ ٧

ب) اكتب س^{٢} − ٢س + ٤ في صورة (س − أ)^{٢} + ب

ج) اكتب مدى الدالّة د(س)

شكر وتقدير

يتوجه المؤلفون والناشرون بالشكر الجزيل إلى جميع من منحهم حقوق استخدام مصادرهم أو مراجعهم. وبالرغم من رغبتهم فى الإعـراب عن تقديرهم لكل جهد تم بذله، وذكر كل مصدر تم استخدامه لإنجاز هذا العمل، إلا أنه يستحيل ذكرها وحصرها جميعًا. وفي حال إغفالهم لأي مصدر أو مرجع فإنه يسرهم ذكره في النسخ القادمة من هذا الكتاب.

Juergen Hasenkopf/Alamy Stock Photo; Gopinath Duraisamy/EyeEm/Getty Images

مزون للطباعة والنشر والتغليف (ش.م.م) - ٢٤٨١٥٦٩٣

الرياضيات المتقدمة

الصف الحادي عشر

كتاب الطالب

يتضمن هذا الكتاب:

- جداول معرفة قبلية للتذكر والتحقق من التعلم السابق.
- مهارات رياضية جديدة مع أمثلة محلولة تتضمن تفسيرات واضحة.
- أسئلة تطبيقية لمساعدة الطلبة على تعزيز معرفتهم والتقدم من خلال المنهج الدراسي.
- أنشطة تشجع على مناقشة المفاهيم الرياضية.
- فرص لإجراء استقصاءات أعمق في كيفية تطبيق الرياضيات لحل مجموعة متنوعة من المسائل.
- قائمة تقييم ذاتي للتحقق من التعلم والفهم.
- أسئلة مراجعة نهاية الوحدة ليتحقق الطالب من إتقانه للمهارات التي درسها في الوحدة.

يشمل منهج الرياضيات المتقدمة للصف الحادي عشر أيضًا:

- كتاب النشاط.
- دليل المعلّم.

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om