سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

رؤية عمان 2040 OmanVision
نتقدم بثقة Moving Forward with Confidence

الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية
1444 هـ - 2022 م

سلطنة عمان
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

الطبعة التجريبية 1444هـ - 2022م

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

مطبعة جامعة كامبريدج، الرمز البريدي CB2 8BS، المملكة المتحدة.

تُشكِّل مطبعة جامعة كامبريدج جزءًا من الجامعة.
وللمطبعة دور في تعزيز رسالة الجامعة من خلال نشر المعرفة، سعيًا وراء
تحقيق التعليم والتعلم وتوفير أدوات البحث على أعلى مستويات التميز العالمية.

© مطبعة جامعة كامبريدج ووزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

يخضع هذا الكتاب لقانون حقوق الطباعة والنشر، ويخضع للاستثناء التشريعي
المسموح به قانونًا ولأحكام التراخيص ذات الصلة.
لا يجوز نسخ أي جزء من هذا الكتاب من دون الحصول على الإذن المكتوب من
مطبعة جامعة كامبريدج ومن وزارة التربية والتعليم في سلطنة عُمان.

الطبعة التجريبية ٢٠٢٢ م، طُبعت في سلطنة عُمان

هذه نسخة تمَّت مواءمتها من كتاب الطالب – الرياضيات للصف الحادي عشر – من سلسلة
كامبريدج A Level Pure Mathematics 1 & Cambridge International AS –
للمؤلف سو بمبرتن.

تمَّت مواءمة هذا الكتاب بناءً على العقد المُوقَّع بين وزارة التربية والتعليم ومطبعة
جامعة كامبريدج.
لا تتحمَّل مطبعة جامعة كامبريدج المسؤولية تجاه توفُّر أو دقة المواقع الإلكترونية
المستخدمة في هذا الكتاب، ولا تؤكِّد أن المحتوى الوارد على تلك المواقع دقيق
وملائم، أو أنه سيبقى كذلك.

تمَّت مواءمة الكتاب

بموجب القرار الوزاري رقم ١٢١ / ٢٠٢٢ واللجان المنبثقة عنه

جميع حقوق الطبع والتأليف والنشر محفوظة لوزارة التربية والتعليم
ولا يجوز طبع الكتاب أو تصويره أو إعادة نسخه كاملاً أو مجزّأً أو ترجمته
أو تخزينه في نطاق استعادة المعلومات بهدف تجاري بأي شكل من الأشكال
إلا بإذن كتابي مسبق من الوزارة، وفي حالة الاقتباس القصير يجب ذكر المصدر.

المغفور لـه

السلطان قابوس بن سعيد

-طيّب اللّه ثراه-

حضرة صاحب الجلالة

السلطان هيثم بن طارق المُعظَّم

-حفظه اللّه ورعاه-

سلطنـــــة عُمـــــان

النَّشيدُ الْوَطَنِيُّ

يـا رَبَّنـا احْفَـظْ لنـا جَـلالَـةَ الـسُّـلْـطـان
وَالشَّـعْبَ فـي الأَوْطـان بِـالْـعِـزِّ والأَمـان
وَلْـيَـدُمْ مـؤَيَّـدًا عـاهِـلاً مُـمَـجَّـدًا
بِـالـنُّـفـوسِ يُـفْـتَـدى

يا عُمانُ نَحْنُ مِنْ عَهْدِ النَّبي أَوْفِياءُ مِنْ كِرامِ الْعَرَبِ
فـارْتَقـي هـامَ السَّمـاء وَامْلَئي الْكَـوْنَ الضِّيـاء
وَاسْعَدي وَانْعَمي بِالرَّخـاء

تقديم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على خير المرسلين، سيّدنا مُحمَّد، وعلى آله وصحبه أجمعين. وبعد:

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المنظومة التعليمية في جوانبها ومجالاتها المختلفة كافة؛ لتُلبّي مُتطلّبات المجتمع الحالية، وتطلُّعاته المستقبلية، ولتتواكب مع المُستجدّات العالمية في اقتصاد المعرفة، والعلوم الحياتية المختلفة؛ بما يؤدّي إلى تمكين المخرجات التعليمية من المشاركة في مجالات التنمية الشاملة للسلطنة.

وقد حظيت المناهج الدراسية، باعتبارها مكوِّنًا أساسيًّا من مكوّنات المنظومة التعليمية، بمراجعة مستمرة وتطوير شامل في نواحيها المختلفة؛ بدءًا من المقررات الدراسية، وطرائق التدريس، وأساليب التقويم وغيرها؛ وذلك لتتناسب مع الرؤية المستقبلية للتعليم في السلطنة، ولتتوافق مع فلسفته وأهدافه.

وقد أولت الوزارة مجال تدريس العلوم والرياضيات اهتمامًا كبيرًا يتلاءم مع مستجدات التطور العلمي والتكنولوجي والمعرفي. ومن هذا المنطلق اتَّجهت إلى الاستفادة من الخبرات الدولية؛ اتساقًا مع التطوُّر المُتسارع في هذا المجال، من خلال تبنّي مشروع السلاسل العالمية في تدريس هاتَين المادّتَين وفق المعايير الدولية؛ من أجل تنمية مهارات البحث والتقصّي والاستنتاج لدى الطلاب، وتعميق فهمهم للظواهر العلمية المختلفة، وتطوير قدراتهم التنافُسية في المسابقات العلمية والمعرفية، وتحقيق نتائج أفضل في الدراسات الدولية.

إن هذا الكتاب، بما يحويه من معارف ومهارات وقيَم واتجاهات، جاء مُحقِّقًا لأهداف التعليم في السلطنة، وموائمًا للبيئة العمانية، والخصوصية الثقافية للبلد، بما يتضمَّنه من أنشطة وصور ورسومات. وهو أحد مصادر المعرفة الداعمة لتعلُّم الطالب، بالإضافة إلى غيره من المصادر المختلفة.

مُتمنّية لأبنائنا الطلاب النجاح، ولزملائنا المعلّمين التوفيق فيما يبذلونه من جهود مُخلِصة، لتحقيق أهداف الرسالة التربوية السامية؛ خدمة لهذا الوطن العزيز، تحت ظل القيادة الحكيمة لمولانا حضرة صاحب الجلالة السلطان هيثم بن طارق المعظم، حفظه الله ورعاه.

والله ولي التوفيق

د. مديحة بنت أحمد الشيبانية

وزيرة التربية والتعليم

المحتويات

المقدمة xiii

الوحدة الأولى: المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية

١-١ حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل إلى عوامل ١٩

١-٢ القيم العظمى والقيم الصغرى للدالة التربيعية ٢٥

١-٣ المتباينات التربيعية ٣٢

١-٤ جذور المعادلة التربيعية ٣٧

١-٥ حلّ المعادلات الآنيّة (معادلة خطّية ومعادلة تربيعية) ٤٢

١-٦ التقاطع بين مستقيم ومنحنى الدالة التربيعية ٤٤

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى ٥٠

الوحدة الثانية: الدوال

الوحدة الثالثة: المتتاليات والمتسلسلات

الوحدة الرابعة: مقاييس النزعة المركزية

الوحدة الخامسة: مقاييس التشتّت

المقدمة

يُعدّ فهم علم الرياضيات والقدرة على العمل به مهارة حياتية مهمة. إضافة إلى أن كثيرًا من الوظائف تتطلب فهمًا رياضيًّا جيدًا، فكلنا نستخدم علم الرياضيات في أساسيات حياتنا اليومية. حيث إننا نستخدم معرفتنا الرياضية في تحديد الميزانية عندما نخطط لعطلة، وفي تصميم غرفتنا لمعرفة كم تحتاج من الطلاء لطلائها، أو حتى عند تعديل وصفة طبخ لتكفي عددًا أكبرمن الأشخاص.

إضافة إلى هذه المهارات الحياتية، يساعد علم الرياضيات الفرد على تطوير منهجية خاصة للتفكير، بما في ذلك تطوير مهاراته في حل المسألة ومهاراته في أي عمل آخر يقوم به.

من المحتمل ألّا يكون لديك فهم واضح لماهية 'المسألة الرياضية'. إنها إشكالية جديرة بالاهتمام، وكثير من الناس حاروا في شأنها. وقد ترغب في أن يكون لك رأي خاص حول هذه الإشكالية، التي ستشهد على تطورها مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي عبارة عن سؤال رياضي لا تعرف إجابته مباشرة، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا لحلها، وقد تضطر إلى تجريب أساليب وأفكار متعددة، بمفردك أو بالتشارك مع الآخرين، حتى تتوصل إلى طريقة حلها.

سيساعدك هذا الكتاب في تعلم مبادئ الرياضيات اللازمة لإجراء الاختبارات وتطوير مهاراتك في حلّ المسألة وفي حل مسائل تتعلق بمواقف من الحياة اليومية.

وحيث إنك تعوّدت على التواصل مع الآخرين لفظيًّا أو بالكتابة أو بالرسم، فإنك من خلال دراسة هذا الكتاب ستتمكن من التواصل باستخدام الرياضيات. وهذا يعني عرض الحلول بخطوات واضحة بحيث يتمكن أيّ شخص آخر بمتابعة هذه الحلول، أو مناقشة هذه الأفكار الرياضية مع زملائه. إن استكشاف المسائل ومناقشتها بالشراكة مع الآخرين سيساعدك على تطوير إدراكك، كما أن مناقشة تسلسل أفكارك وتوضيحها سيساعدك ويساعد زملاءك على تطوير مهارة الإقناع بالحجة والبرهان للمسائل.

كما يمكن اعتبار التمثيل الرياضي عبارة عن التقاء الرياضيات بالعالم الحقيقي، حيث تسمح لنا هذه التمثيلات الرياضية بالتوقع وبفهم أفضل للواقع. إن تمثيل ظواهر الحياة اليومية باستخدام الجبر يساعدنا على القيام بتوقعات وعلى مقارنتها بالنتائج الواقعية، ومن ثم تحسين هذه التمثيلات. فقد تتوقع مثلًا أنك ستنفق ٢٥ ريالًا عُمانيًّا في يوم عطلتك، هذا يعني أنه في وقت مقداره ن يوم، ستنفق ٢٥ن ريالًا عُمانيًّا. بعد أيام قليلة يمكنك أن تقارن ما أنفقته فعلًا بهذا العدد، وتعدّل تمثيلك بناء عليه. إن الأمثلة الشائعة الشائعة في التمثيل الرياضي تتضمن التوقعات الجوية، التغير المناخي، التغير الديموغرافي (السكاني)، والأسواق المالية.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- نشاطات استكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بتوسيع أفكار زميله وإثرائها، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات صغيرة، ثم مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.

- الأسئلة المصنفة برمز النجمة '★'، '★' أو '★' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'التمثيل' أو 'حل المسائل'، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين، وقد تتضمن هذه التمارين العديد من التطبيقات الحياتية اليومية مثل التي يمكن أن تواجهها في حياتك الواقعية، وهنا تكمن ضرورة الرياضيات، حيث تحتاج إلى حل تمارين تتعلق بالأمور المالية والتجارية والارتفاعات وغيرها.
- التمارين المتنوعة الكثيرة التي تساعد الطلبة على تكرار الأهداف المعروضة في الدرس، وقد جاءت هذه التمارين في معظم الأحيان متدرجة من السهل إلى الصعب حيث يستطيع الطالب امتلاك المفهوم في بدايتها، ثم يقوم بالتحليلات الرياضية المطلوبة عند الانتهاء منها.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا'... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). فهي الطريقة التي يكتب بها علماء الرياضيات معلوماتهم. ستواجه تحديات (أسئلة غير مألوفة) فإذا كنت متعوّدًا على أن تكون نشطًا في الرياضيات، فستكون لديك فرصة أفضل لتصبح قادرًا على التعامل مع هذه التحديات بنجاح.

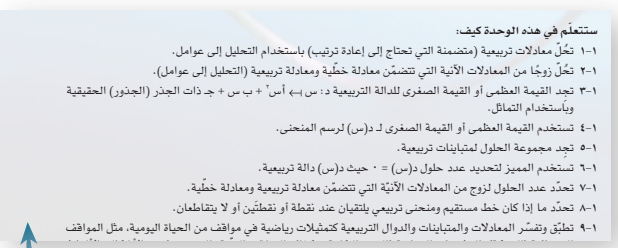
توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن العثور عليها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون بداية في هذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.



ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تحُلّ معادلات تربيعية (متضمنة التي تحتاج إلى إعادة ترتيب) باستخدام التحليل إلى عوامل.

١-٢ تحُلّ زوجًا من المعادلات الآنية التي تتضمّن معادلة خطّية ومعادلة تربيعية (التحليل إلى عوامل).

١-٣ تجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة التربيعية د: س ← أس^{٢} + ب س + جـ ذات الجذر (الجذور) الحقيقية وبأستخدام التماثل.

١-٤ تستخدم القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لـ د(س) لرسم المنحنى.

١-٥ تجد مجموعة الحلول لمتباينات تربيعية.

١-٦ تستخدم المميز لتحديد عدد حلول د(س) = ٠ حيث د(س) دالة تربيعية.

١-٧ تحدّد عدد الحلول لزوج من المعادلات الآنيّة التي تتضمّن معادلة تربيعية ومعادلة خطّية.

١-٨ تحدّد ما إذا كان خط مستقيم ومنحنى تربيعي يلتقيان عند نقطة أو نقطتين أو لا يتقاطعان.

١-٩ تطبّق وتفسّر المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية كتمثيلات رياضية في مواقف من الحياة اليومية. مثل المواقف

الأهداف التعليمية: تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

نتيجة ١

تكتب المتباينات التربيعية في صورة أس^{٢} + ب س + جـ □ ٠، حيث أ ≠ ٠، يمكن استخدام الرموز ≤، ≥، <، > في المربع.

نتيجة: مربعات تحتوي على ملخص لأهم الطرق والحقائق والصيغ.

منحنى الدالة التربيعية

المفردات الأساسية: هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

استكشف ١

٢س^{٢} + ٣س − ٥ = (س − ١)(س − ٢)

المعروض أدناه هو حلّ مُنى للمعادلة السابقة:

حلّلت الطرف الأيمن إلى عوامل: (س − ١)(٢س + ٥) = (س − ١)(س − ٢)

٢س^{٢} + ٣س − ٥ = س^{٢} − ٣س + ٢

٢س^{٢} − ٣ = ٠

أعادت ترتيب الحدود: س = −٧

استكشف: تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم. (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم)

معرفة قبلية

المصدر	تعلّمت سابقًا أن	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الحادية عشرة	تحلّ معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.	١) حلّ: أ) س^{٢} + س − ١٢ = ٠ ب) س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠ جـ) ٣س^{٢} − ١٧س − ٦ = ٠
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحلّ متباينات خطّية.	٢) حلّ: أ) ٥س − ٨ < ٢ ب) ٣ − ٢س ≥ ٧
الصف العاشر الوحدة التاسعة	تحلّ معادلتَين آنيتَين إحداهما خطّية والأخرى تربيعية.	٣) حلّ: ص = س^{٢} − ٩س + ٣٠ ص = ٣س − ٦

المفردات

حلّل إلى العوامل Expand

منحنى الدالة التربيعية Quadratic curve

نقطة القيمة الصغرى minimum point

نقطة القيمة العظمى maximum point

معرفة قبلية: تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

مثال ١

حلّ المعادلة س^{٢} = ٣س + ٢٨

الحل:

س^{٢} = ٣س + ٢٨	اكتب المعادلة في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠
س^{٢} − ٣س − ٢٨ = ٠	حلّل إلى العوامل.
(س − ٧)(س + ٤) = ٠	استخدم الحقيقة إذا كان ناتج الضرب ل ك = ٠، فإن ل = ٠ أو ك = ٠
س − ٧ = ٠ أو س + ٤ = ٠	حلّ.

أمثلة: تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن حلًّا تم تنفيذه بالكامل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

مُساعَدة

عند التعامل مع المقادير النسبية، يجب أن يذكر أن المقام لا يمكن أن يكون صفرًا إذًا هنا س ≠ ٠ وس ≠ ٣-

مساعدة: مربعات تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

هل تعلم؟

مفهوم تمثيل عدة مقاييس مختلفة بقيمة واحدة ممثلة هو اختراع حديث. فقبل القرن السابع عشر لا نجد مثالاً على استخدام الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال.
وفي محاولة لإيجاد خط طول غانزا في أفغانستان، وفي دراسة عن خصائص المعادن، يعتبر البيروني Al-Biruni الذي عاش في القرن الحادي عشر، أحد أقدم المستخدمين لطريقة إيجاد مقياس ممثل للبيانات. فقد استخدم الأعداد

هل تعلم؟ مربعات تحتوي على حقائق مثيرة للاهتمام تظهر كيف ترتبط الرياضيات بالعالم الأوسع.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

رسم الدوال التربيعية

لرسم المنحنى التربيعي، نحدّد الأجزاء المقطوعة من المحورَين وإحداثيات نقطة التحوّل.

- لإيجاد الجزء المقطوع من المحور السيني، اجعل ص = ٠ وحلّ المعادلة الناتجة باستخدام التحليل إلى العوامل.
- لإيجاد الجزء المقطوع من المحور الصادي، اجعل س = ٠ واحسب ص.
- أوجد إحداثيات نقطة التحوّل عبر تحديد معادلة محور التماثل باستخدام الجزء المقطوع من المحور السيني، ثم تحديد نوع المنحنى للأعلى أم للأسفل باستخدام معامل س^{٢}

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

يوجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم تشفير هذه الأسئلة كالآتي:

- ★ تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- ★ تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- ★ تركز هذه الأسئلة على التمثيل.
- يجب ألّا تستخدم الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- ★ هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى

١) أوجِد مجموعة قيم ك التي لا يتقاطع عندها ص = ك(٤س - ٣) مع المنحنى ص = ٤س^{٢} + ٨س - ٨

٢) أوجِد مجموعة قيم س حيث س(س + ٢) > س

٣) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يقع المنحنى ص = (ك + ١)س^{٢} - ٣س + (ك + ١) تحت المحور السيني.

٤) أوجِد مجموعة قيم س حيث س^{٢} > ٦ - ٥س

٥) أوجِد قيم ك حيث يكون المستقيم ص = ك - ٦س مماسًا للمنحنى ص = س(٢س + ك).

الوحدة الأولى

المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية

Equations, Inequalities, and Quadratic Functions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تحُلّ معادلات تربيعية (متضمنة التي تحتاج إلى إعادة ترتيب) باستخدام التحليل إلى عوامل.

١-٢ تحُلّ زوجًا من المعادلات الآنية التي تتضمّن معادلة خطّية ومعادلة تربيعية (التحليل إلى عوامل).

١-٣ تجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة التربيعية د : س ← أس^{٢} + ب س + جـ ذات الجذر (الجذور) الحقيقية وباستخدام التماثل.

١-٤ تستخدم القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لـ د(س) لرسم المنحنى.

١-٥ تجِد مجموعة الحلول لمتباينات تربيعية.

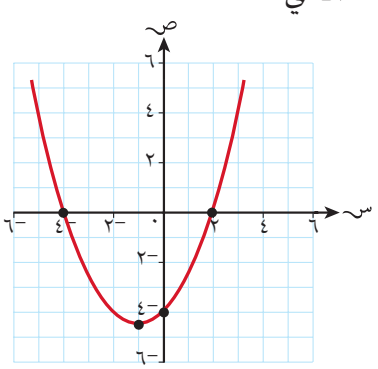
١-٦ تستخدم المميز لتحديد عدد حلول د(س) = ٠ حيث د(س) دالة تربيعية.

١-٧ تحدّد عدد الحلول لزوج من المعادلات الآنيّة التي تتضمّن معادلة تربيعية ومعادلة خطّية.

١-٨ تحدّد ما إذا كان خط مستقيم ومنحنى تربيعي يلتقيان عند نقطة أو نقطتَين أو لا يتقاطعان.

١-٩ تطبّق وتفسّر المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية كتمثيلات رياضية في مواقف من الحياة اليومية، مثل المواقف الفيزيائية (الحركة)، التطبيقات التجارية (الربح، التكلفة، هكذا) والمواقف الفنّية والتصميم (رسم الأشكال والأنماط باستخدام المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية كشكل أساسي).

معرفة قبلية

المصدر	تعلّمت سابقًا أن	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الحادية عشرة	تحلّ معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.	١) حلّ: أ) $س^{٢} + س - ١٢ = ٠$ ب) $س^{٢} - ٦س + ٩ = ٠$ ج) $٣س^{٢} - ١٧س - ٦ = ٠$
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحلّ متباينات خطّية.	٢) حلّ: أ) $٥س - ٨ < ٢$ ب) $٣ - ٢س \geq ٧$
الصف العاشر الوحدة التاسعة	تحلّ معادلتَين آنيتَين إحداهما خطّية والأخرى تربيعية.	٣) حلّ: $ص = س^{٢} - ٩س + ٣٠$ $ص = ٣س - ٦$
الصف التاسع الوحدة الرابعة عشرة	تفسّر منحنيات الدوال التربيعية. تحدّد الجذور ونقاط التحوّل بيانيًّا.	٤) حدّد الجذور وإحداثيات نقطة التحوّل لمنحنى الدالة التربيعية الآتي: 

المفردات

حلّل إلى العوامل Expand

منحنى الدالة التربيعية Quadratic curve

نقطة القيمة الصغرى minimum point

نقطة القيمة العظمى maximum point

نقطة الثبات stationary point

نقطة التحوّل turning point

الجذور roots

المميّز discriminant

المماسّ tangent

لماذا ندرس المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية؟

سبق أن تعلّمت في الصف التاسع، الوحدة السابعة، عن التمثيل البياني للمستقيمات وخصائصها، حيث تظهر في الحياة اليومية من حولك. فمثلًا، يمكن لعقد الهاتف النقّال أن يتضمّن تكلفة شهرية ثابتة وتكلفة إضافية لكلّ دقيقة من المكالمات: التكلفة الشهرية (ص) تعطى في صورة ص = م س + جـ، حيث جـ التكلفة الشهرية الثابتة، م تكلفة الدقيقة الواحدة، س عدد الدقائق المستخدمة. من المهم أن تعرف أنه ليست كل العلاقات خطية، بل نحتاج أحيانًا إلى مجموعات أخرى من الدوال مثل الدوال التربيعية.

تكون الدوال التربيعية في صورة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ (أ ≠ ٠) ولها خصائص مثيرة للاهتمام تجعلها تختلف كثيرًا عن الدوال الخطّية. للدوال التربيعية قيمة عظمى أو قيمة صغرى، كما أن منحناها متماثل. تؤمّن دراسة الدوال التربيعية طريقًا للتفكير في دوال أكثر تعقيدًا مثل ص = ٧س^{٥} − ٤س^{٤} + س^{٢} + س + ٣

رسمت سابقًا منحنى لدوال تربيعية مثل د(س) = ١٠ − س^{٢} وهي من المنحنيات الأكثر شيوعًا الذي يمثّل مسار كرة تم رميها في الهواء. واكتشاف أنّ هذا المسار يتمثّل بدالة تربيعية كان لجاليليو Galileo مع بداية القرن السابع عشر، الذي توصل إلى أنّ الحركة الرأسية لكرة تم رميها رأسيًّا إلى الأعلى يمكن تمثيلها بدالة تربيعية.

كما أن الخوارزمي كتب أول كتاب في الجبر، حيث أتت كلمة 'الجبر' 'Algebra' مستمدّة من عنوان هذا الكتاب (الجبر والمقابلة). يمثّل الجبر والمقابلة العمليتَين الأساسيتَين التي استخدمهما الخوارزمي في حل المعادلات التربيعية. لقد أسس كتاب الخوارزمي أول حلّ نظامي للمعادلات الخطية والتربيعية وأحد إنجازاته في الجبر كان برهان كيفية حلّ المعادلات التربيعية.

١-١ حلّ المعادلات التربيعية بالتحليل إلى عوامل

سبق أن تعلّمت طريقة التحليل إلى عوامل وطريقة الصيغة التربيعية لحلّ المعادلات التربيعية جبريًّا.

مثـــال ١

حلّ المعادلة س^{٢} = ٣س + ٢٨

الحـــلّ:

س^{٢} = ٣س + ٢٨ ..... اكتب المعادلة في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

س^{٢} − ٣س − ٢٨ = ٠ ..... حلّل إلى العوامل.

(س − ٧)(س + ٤) = ٠ ..... استخدم الحقيقة إذا كان ناتج الضرب ل ك = ٠، فإن ل = ٠ أو ك = ٠

س − ٧ = ٠ أو س + ٤ = ٠ ..... حلّ.

∴ س = ٧ أو س = −٤

مثـــال ٢

حلَّ المعادلة الآتية ٩س^{٢} − ٣٩س − ٣٠ = ٠

الحـــلّ:

٩س^{٢} − ٣٩س − ٣٠ = ٠ ..... اقسم الطرفَين على العامل المشترك ٣

٣س^{٢} − ١٣س − ١٠ = ٠ ..... حلّل إلى العوامل.

(٣س + ٢)(س − ٥) = ٠

٣س + ٢ = ٠ أو س − ٥ = ٠ ..... حلّ.

س = $-\frac{٢}{٣}$ أو س = ٥

مساعدة

اقسم أولًا، إن أمكن، على العامل المشترك.

استكشف ١

٢س^{٢} + ٣س − ٥ = (س − ١)(س − ٢)

المعروض أدناه هو حلّ مُنى للمعادلة السابقة:

حلّلت الطرف الأيمن إلى عوامل: (س − ١)(٢س + ٥) = (س − ١)(س − ٢)

٢س^{٢} + ٣س − ٥ = س^{٢} − ٣س + ٢

٢س^{٢} − ٣ = ٠

أعادت ترتيب الحدود: س = −٧

ناقش حلّ مُنى مع أقرانك في الصفّ موضّحًا الخطأ الذي ارتكبته، ثم حلَّ المعادلة حلًّا صحيحًا.

مثـــال ٣

حلَّ المعادلة $\frac{٢١}{٢س} - \frac{٢}{س + ٣} = ١$

الحـــلّ:

$\frac{٢١}{٢س} - \frac{٢}{س + ٣} = ١$ ..... اضرب الطرفَين في ٢س(س + ٣).

$٢١(س + ٣) - ٤س = ٢س(س + ٣)$ ..... فكَّ الأقواس وأَعد ترتيب الحدود.

$٢س^{٢} - ١١س - ٦٣ = ٠$ ..... حلّل إلى العوامل.

$(٢س + ٧)(س - ٩) = ٠$

$٢س + ٧ = ٠$ أو $س - ٩ = ٠$ ..... حلّ.

$\therefore س = -\frac{٧}{٢}$ أو $س = ٩$

مساعدة

عند التعامل مع المقادير النسبية، يجب أن يذكر أن المقام لا يمكن أن يكون صفرًا إذًا هنا $س \neq ٠$ و $س \neq -٣$

مثـــال ٤

حلَّ المعادلة $\frac{٣س^{٢} + ٢٦س + ٣٥}{س^{٢} + ٨} = ٠$

الحـــلّ:

$\frac{٣س^{٢} + ٢٦س + ٣٥}{س^{٢} + ٨} = ٠$ ..... اضرب طرفَي المعادلة في $(س^{٢} + ٨)$

$٣س^{٢} + ٢٦س + ٣٥ = ٠$ ..... حلّل إلى العوامل.

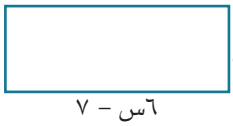
$(٣س + ٥)(س + ٧) = ٠$

$٣س + ٥ = ٠$ أو $س + ٧ = ٠$ ..... حلّ.

$\therefore س = -\frac{٥}{٣}$ أو $س = -٧$

مثـــال ٥

مستطيل بُعداه (س) سم و (٦س – ٧) سم ومساحته ٩٠ سم^{٢}.
أوجد بُعدَي المستطيل.



الحـــلّ:

المساحة = س(٦س – ٧) ..... فكّ الأقواس.

٦س^{٢} – ٧س = ٩٠ ..... اكتب المعادلة.

٦س^{٢} – ٧س – ٩٠ = ٠ ..... حلّل إلى العوامل.

(٢س – ٩)(٣س + ١٠) = ٠

٢س – ٩ = ٠ أو ٣س + ١٠ = ٠ ..... حلّ.

س = $\frac{٩}{٢}$ = ٤$\frac{١}{٢}$ أو س = – $\frac{١٠}{٣}$ (مرفوض) ..... بما أن بُعدَي المستطيل كمّية موجبة، فإن قيمة س = ٤$\frac{١}{٢}$

عندما يكون س = ٤$\frac{١}{٢}$ فإن ٦س – ٧ = ٢٠

∴ بُعدَي المستطيل ٤$\frac{١}{٢}$ سم، ٢٠ سم

مثـــال ٦

لدى سعيد ٢٠ لعبة يريد بيعها، وربحه يعتمد على عدد الألعاب التي سيبيعها، وعلى سعر اللعبة الواحدة.
شكّل سعيد دالة ليحدّد سعر البيع س (بالريال العُماني) الذي يجب أن يبيع به كل لعبة ليحصل على الربح (ح)

ح = س(س – ٢٠)

أوجِد سعر البيع للّعبة الواحدة إذا كان سعيد يريد ربح ١٢٠٠٠ ريال عُماني.

الحـــلّ:

ح = س (س – ٢٠) ..... عوّض عن قيمة ح في الصيغة.

١٢٠٠٠ = س(س – ٢٠) ..... فكّ الأقواس.

١٢٠٠٠ = س^{٢} – ٢٠س ..... أعِد ترتيب المعادلة التربيعية لتصبح مساوية للصفر.

س^{٢} – ٢٠س – ١٢٠٠٠ = ٠ ..... حلّل المعادلة التربيعية إلى العوامل.

(س + ١٠٠)(س – ١٢٠) = ٠ ..... حدّد قيمة س التي تجعل كل عامل صفرًا.

س = –١٠٠ (مرفوض) أو س = ١٢٠ ..... اختر قيمة س التي تتناسب مع سياق المسألة، حيث إنه من المستحيل لسعر الألعاب أن يكون عددًا سالبًا.

س = ١٢٠ ريال عُماني

سعر البيع للعبة الواحدة يساوي ١٢٠ ريالًا عُمانيًّا.

تمارين ١-١

١) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية باستخدام التحليل إلى العوامل:

أ) $س^{٢} + ٣س - ١٠ = ٠$

ب) $٥س^{٢} + ١٩س + ١٢ = ٠$

ج) $٢٠ - ٧س = ٦س^{٢}$

د) $س(١٠س - ١٣) = ٣$

٢) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ) $س - \frac{٦}{س - ٥} = ٠$

ب) $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س + ٢} = ١$

ج) $\frac{٥س + ١}{٤} - \frac{٢س - ١}{٢} = س^{٢}$

د) $\frac{٥}{س + ٣} + \frac{٣س}{س + ٤} = ٢$

هـ) $\frac{٣}{س + ١} + \frac{١}{س(س + ١)} = ٢$

و) $\frac{٣}{س + ٢} + \frac{١}{س - ١} = \frac{١}{(س + ١)(س + ٢)}$

٣) حلَّ كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

أ) $\frac{٣س^{٢} + س - ١٠}{س^{٢} - ٧س + ٦} = ٠$

ب) $\frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} + ٥} = ٠$

ج) $\frac{س^{٢} - ٩}{١٠ + ٧س} = ٠$

د) $\frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س^{٢} + ٧س + ١٠} = ٠$

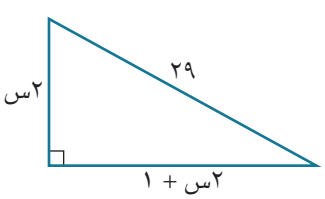
هـ) $\frac{٦س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} + ٧س + ٤} = ٠$

و) $\frac{٢س^{٢} + ٩س - ٥}{١ + س^{٤}} = ٠$

مُساعَدة

تذكّر أن تتحقّق من كلّ ناتج من النواتج.

٤) يبيّن الشكل المجاور مثلّثًا قائم الزاوية أطوال أضلاعه (٢س) سم، (٢س + ١) سم، ٢٩ سم.

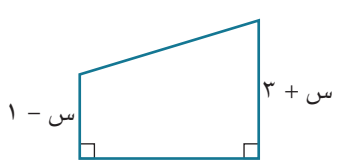


أ) بيّن أن $٢س^{٢} + س - ٢١٠ = ٠$

ب) أوجد أطوال أضلاع المثلّث.

٥) مساحة شبه المنحرف المجاور ٣٥,٧٥ سم^{٢}.

أوجد قيمة س.



★ **٦)** تمّ رمي كرة في الهواء. يمكن تمثيل ارتفاعها عن سطح الأرض (ع متر)، بالمعادلة:

$$ع = ٣ + ٢ن - ن^{٢}،$$

حيث ن الزمن بالثواني.

بقيت الكرة في الهواء منذ اللحظة الأولى لرميها. أوجد:

أ) الارتفاع الذي كانت عليه الكرة عند رميها في اللحظة الأولى.

ب) الزمن اللازم لتكون الكرة على ارتفاع ٤ أمتار.

٧) يتم تحديد أرباح مصنع (بمئات الريالات العُمانية) لعملية تصنيع منتج ما في شهر واحد بواسطة:

$$ر = ٢س^{٢} - ٧س$$

حيث س عدد القطع المنتجة.

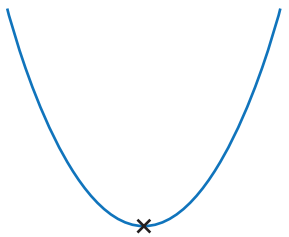
أ) كم قطعة يجب أن ينتج المصنع ليبيعها فيكون الربح صفرًا؟ وضّح إجابتك.

ب) كم قطعة يجب أن ينتج المصنع لربح ٦٦٠٠٠ ريالًا عُمانيًّا؟

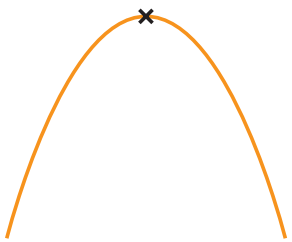
١-٢ القيم العظمى و القيم الصغرى للدالة التربيعية

الصورة العامّة للدالة التربيعية هي د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ حيث أ، ب، جـ أعداد ثابتة، أ ≠ ٠

يُسمّى شكل منحنى الدالة د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ **منحنى الدالة التربيعية** **quadratic curve**. يعتمد وضع المنحنى على قيمة أ، أي إشارة معامل س^{٢}



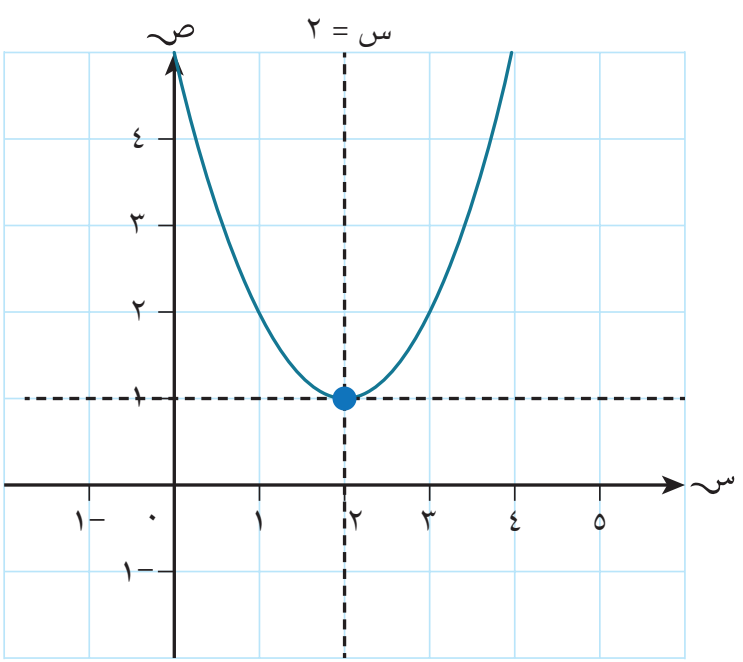
إذا كان أ > ٠ يكون للمنحنى **نقطة صغرى** **minimum point** وتكون (س، ص) أسفل نقطة في المنحنى وتكون ص القيمة الصغرى.



إذا كان أ < ٠ يكون للمنحنى **نقطة عظمى** **maximum point** وتكون (س، ص) أعلى نقطة في المنحنى وتكون ص القيمة العظمى.

مُساعَدة

عند رسم منحنى الدالة التربيعية، يجب الأخذ في الاعتبار ما يأتي:
- الشكل العام للمنحنى
- التقاطع مع المحورَين
- إحداثيات نقطة رأس المنحنى.



مُساعَدة

النقطة التي يكون الميل عندها صفرًا تُسمّى **نقطة الثبات** **stationary point** أو **نقطة التحوّل** **turning point**.

مُساعَدة

محور التماثل هو المستقيم الذي يقسم منحنى الدالة التربيعية لقسمين متماثلين.

لاحظ أن معادلة محور التماثل هي س = ٢

مثـــال ٧

إذا كانت الدالة د(س) = س^{٢} − ٣س − ٤ حيث س ∈ ع

أ أوجد نقاط تقاطع منحنى الدالة ص = د (س) مع المحورَين السيني والصادي.

ب ارسم منحنى الدالة ص = د(س)، وأوجد إحداثيات نقطة التحول.

الحـــلّ:

أ د (س) = س^{٢} − ٣س − ٤ ..... لتجد الجزء المقطوع مع المحور الصادي، ضع س = ٠

عندما س = ٠، فإن ص = (٠)^{٢} − ٣ × ٠ − ٤ = −٤

نقطة تقاطع منحنى الدالة د(س) مع محور الصادات هي (٠، −٤)

عندما ص = ٠، فإن س^{٢} − ٣س − ٤ = ٠ ..... لتجد الجزأين المقطوعَين من المحور السيني، اجعل ص = ٠

(س + ١)(س − ٤) = ٠ ..... حلل إلى العوامل.

س = −١ أو س = ٤ ..... حل.

∴ (−١، ٠)، (٤، ٠) هي نقاط تقاطع منحنى الدالة مع المحور السيني.

ب يمرّ محور التماثل في نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين س = −١ و س = ٤، وعليه تكون

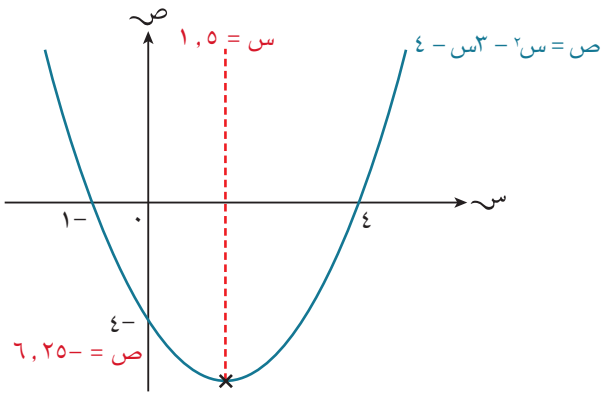
معادلة محور التماثل س = $\frac{-١ + ٤}{٢}$ = ١,٥

عندما س = ١,٥ فإنّ ص = (١,٥)^{٢} − ٣(١,٥) − ٤

ص = −٦,٢٥

وحيث إن أ > ٠ فإنّ شكل المنحنى مفتوح إلى الأعلى (شكل ∪)

∴ نقطة التحول هي (١,٥، −٦,٢٥)



مثـــال ٨

أجب عن الأسئلة أدناه للدالة التربيعية ص = ١٠ + ٨س − ٢س^{٢} حيث س ∋ ع

أ أوجِد الجزأَين المقطوعَين من المحورَين السيني والصادي.

ب ارسم منحنى الدالة.

ج أوجد إحداثيات نقطة التحوّل وحدّدها على الرسم.

الحـــلّ:

أ ص = ١٠ + ٨س − ٢س^{٢}

لتجد الجزء المقطوع من المحور الصادي، اجعل س = ٠

عندما س = ٠، فإن ص = ١٠ + ٨ × ٠ − ٢ × ٠^{٢} = ١٠

الجزء المقطوع من المحور الصادي = ١٠

لتجد الجزء المقطوع من المحور السيني، اجعل ص = ٠

عندما ص = ٠، فإن ١٠ + ٨س − ٢س^{٢} = ٠

اقسم على العامل المشترك.

−٢(س^{٢} − ٤س − ٥) = ٠

حلّل إلى العوامل.

س^{٢} − ٤س − ٥ = ٠

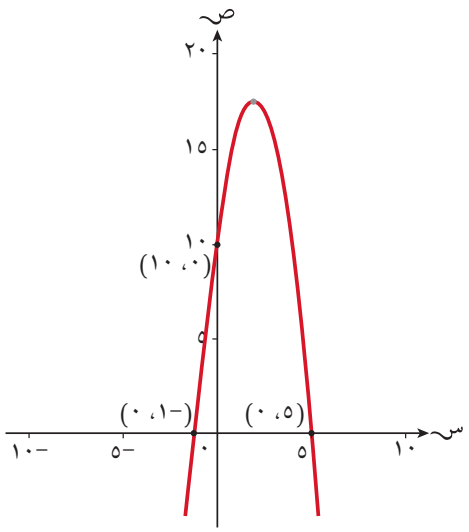
استخدم العوامل لتحل.

(س − ٥)(س + ١) = ٠

س = ٥ أو س = −١

تقطع الدالة محور السينات عند س = ٥، س = −١

ب



بما أن معامل س^{٢} عدد سالب، فإن للمنحنى قيمة عظمى. حدّد بوضوح نقاط التقاطع مع المحورَين اللذَين وجدتهما في الجزئية (أ).

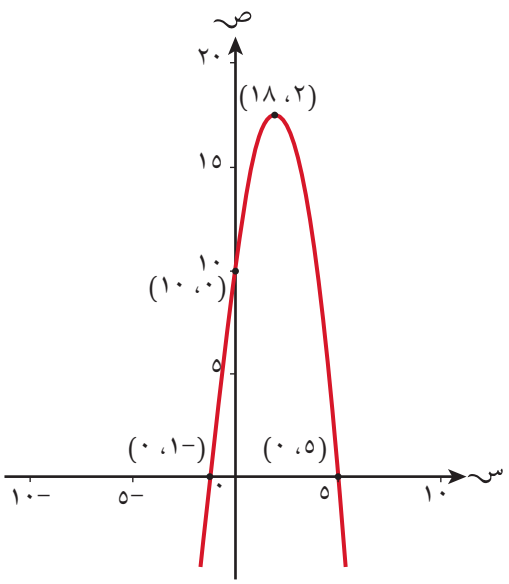
ج) س = $\frac{-١ + ٥}{٢}$ = ٢

تقع نقطة المنتصف للمسافة بين نقطتَي الجزء المقطوع من المحور السيني محور التماثل.

عندما س = ٢، فإن ص = ١٠ + ٨ × ٢ − ٢ × ٢٢ = ١٨

عوّض عن قيمة س لتجد الإحداثي ص لنقطة التحوّل.

(٢، ١٨) هي نقطة التحوّل، وفي هذه الحال تكون عندها قيمة عظمى.



مثـــال ٩

ارسم منحنى الدالة ص = س^{٢} − ٦س + ٩

الحـــلّ:

ص = س^{٢} − ٦س + ٩

لتجد الجزء المقطوع مع المحور الصادي، ضع س = ٠

عندما س = ٠، يكون ص = ٠^{٢} − ٦ × ٠ + ٩ = ٩

∴ الجزء المقطوع من المحور الصادي = ٩

عندما ص = ٠، يكون س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠

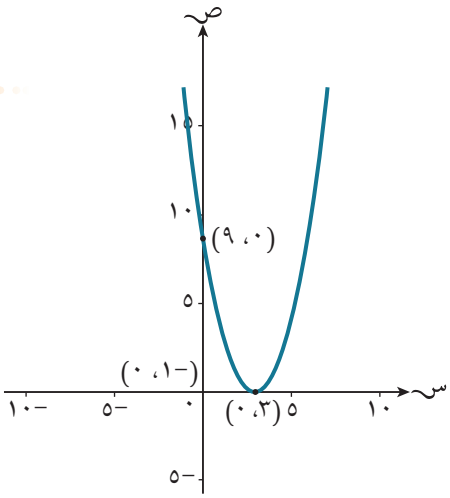
حدّد الجزء المقطوع من المحور السيني بجعل ص = ٠

(س − ٣)(س − ٣) = ٠

حلّل إلى العوامل لحلّ المعادلة.

س = ٣

المعادلة التربيعية لها عامل واحد مكرّر ما يعني أن لها حلًا واحدًا ونقطة تقاطع واحدة مع المحور السيني. وعليه، فإن المنحنى يمسّ المحور السيني عندما س = ٣ ولا يقطعه.



إذًا، الجزء المقطوع من المحور السيني يساوي ٣ وبما أن معامل س^{٢} موجب فإن نقطة التحوّل قيمة صغرى.

معادلة محور التماثل س = ٣ وتقع نقطة التحوّل على المحور السيني.

مثـال ١٠

ارتفاع طائرة ع (بآلاف الأقدام) فوق سطح البحر معطى بالمعادلة الآتية:

ع = ٨ + ١٥ن − ٢ن^{٢}

حيث ن الزمن (بالساعة) منذ أقلعت الطائرة.

أوجد الارتفاع الأقصى الذي يمكن للطائرة أن تصل إليه فوق سطح البحر خلال رحلتها.

الحـلّ:

للمنحنى نقطة عظمى. — لأن إشارة أ سالبة

٠ = (٢ن + ١)(−ن + ٨) — لتجد نقاط التقاطع مع المحور السيني، اجعل ع = ٠ وحلّل إلى العوامل

∴ ن = − ٠,٥ أو ن = ٨

نقطة المنتصف بين ن = ٨، ن = −٠,٥ هي ن = ٣,٧٥

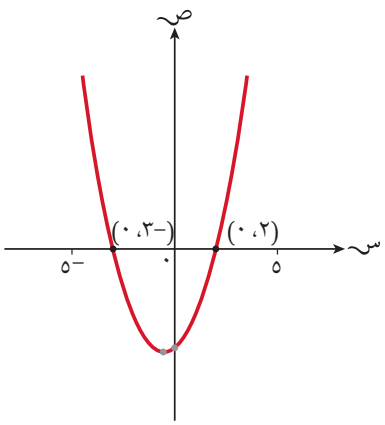
ع = ٨ + ١٥ × ٣,٧٥ − ٢ × (٣,٧٥)^{٢} — عوّض عن قيمة ن وأوجد قيمة ع

وعليه، الارتفاع الأقصى هو ٣٦,١٢٥ ألف قدم أو ٣٦١٢٥ قدمًا.

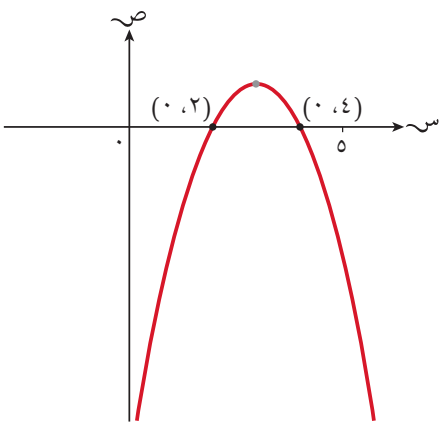
تمارين ١-٢

١) لكل دالة من الدوال التربيعية الآتية، استخدم رسم المنحنى المعطى لتحدّد معادلة محور التماثل، ثم لتحسب إحداثيات نقطة التحوّل.

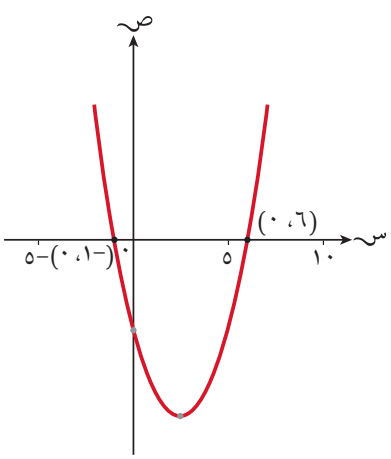
أ) ص = س^{٢} + س − ٦



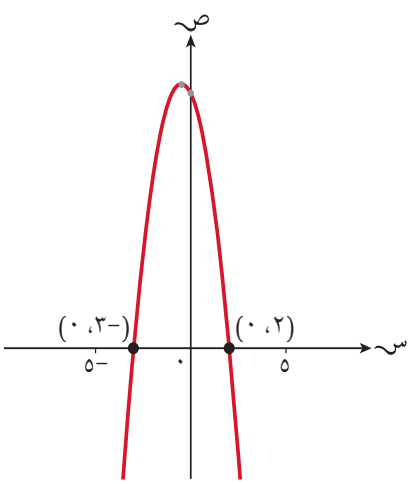
ب) ص = − س^{٢} + ٦س − ٨



ج) ص = س^{٢} − ٥س − ٦



د) ص = ١٢ − ٢س − ٢س^{٢}

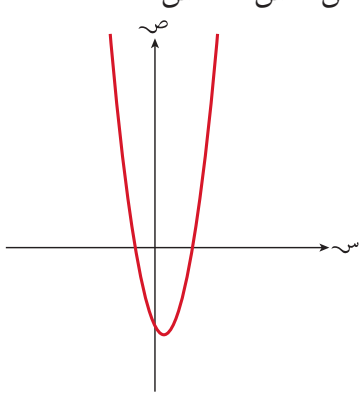


٢) في كل حالة من الحالات الآتية:

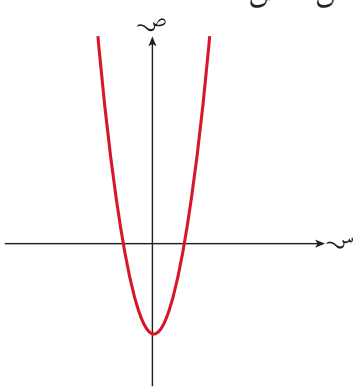
١) احسب الجزأين المقطوعَين من المحورَين.

٢) حدّد معادلة محور التماثل، ثم احسب إحداثيات نقطة التحوّل.

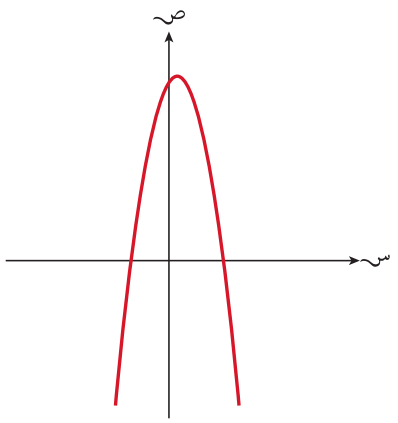
أ) ص = س^{٢} − ٢س − ٨



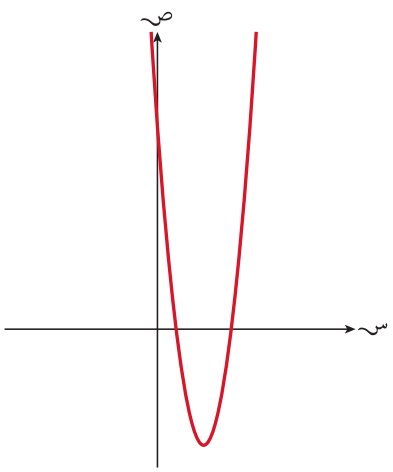
ب) ص = س^{٢} − ٩



ج ص = ١٥ + ٢س – س^{٢}



د ص = ٢س^{٢} – ١٥س + ١٨



٣) استخدم تماثل كلّ دالة من الدوال التربيعية الآتية لتجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى. ارسم كلّ منحنى مبيّنًا جميع نقاط التقاطع مع المحورَين:

أ ص = س^{٢} – س – ٢٠

ب ص = س^{٢} + ٤س – ٢١

ج ص = س^{٢} + ٣س – ٢٨

٤) تمّ بناء غرفة تتمثّل مساحتها:

م = ٥س – س^{٢}

حيث بُعداها س، (٥ – س) بالأمتار. أوجد أكبر مساحة ممكنة للغرفة، وحدّد بُعدَيها اللَّذين يعطيان أكبر مساحة.

٥) تتمثّل دالة ربح شركة بالصيغة:

ر = س(١٢ – س)

حيث يقاس الربح (ر) بآلاف الريالات العُمانية و (س) عدد الوحدات المبيعة. احسب أكبر ربح يمكن الحصول عليه وعدد الوحدات الواجب بيعها للحصول على أكبر ربح.

١-٣ المتباينات التربيعية

سبق أن درست كيفية حلّ المتباينات الخطّية في الفصل الدراسي الأول من الصف التاسع، الوحدة السادسة. المعروض، أدناه، مثالان على ذلك:

حلّ المتباينة ٢(س − ٥) > ٩

٢س − ١٠ > ٩	فُكّ الأقواس.
٢س > ١٩	أضف ١٠ إلى طرفَي المتباينة.
س > ٩,٥	اقسم الطرفَين على ٢

حلّ المتباينة ٥ − ٣س ≤ ١٧

−٣س ≤ ١٢	اطرح ٥ من الطرفَين
س ≥ −٤	اقسم الطرفَين على −٣

مُساعَدة

من المهم جدًا أن تتذكّر أنه عند ضرب طرفَي المتباينة في عدد سالب، أو قسمتهما على عدد سالب، يتوجّب أن تعكس رمز المتباينة. يوضّح المثال كيف تمّت قسمة طرفَي المتباينة على العدد −٣

نتيجة ١

تكتب المتباينات التربيعية في صورة أس٢ + ب س + جـ □ ٠، حيث أ ≠ ٠، يمكن استخدام الرموز ≤، ≥، <، > في المربع.

مجموعة حل المتباينة التربيعية هي مجموعة القيم التي تحقّقها.

يمكن حل المتباينات التربيعية من خلال رسم المنحنى والأخذ بالاعتبار ما إذا كان المنحنى فوق المحور السيني أو تحته.

مثـال ١١

حلّ المتباينة س٢ − ٣س − ٤ < ٠

الحـل:

اجعل ص = س٢ − ٣س − ٤

حدّد الجزأَين المقطوعَين من المحور السيني بجعل ص = ٠

عندما ص = ٠ فإن س٢ − ٣س − ٤ = ٠

حلّل س٢ − ٣س − ٤ = ٠، ثم حدّد نقاط التقاطع مع المحور السيني.

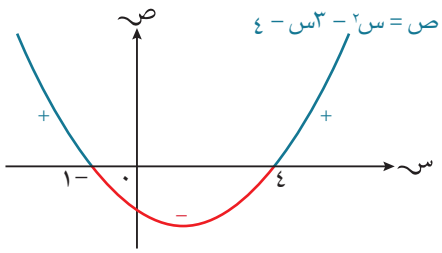
(س + ١)(س − ٤) = ٠

س = −١ أو س = ٤

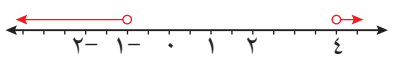
∴ الإحداثي السيني لنقاط التقاطع مع الجزء المقطوع من المحور السيني هو −١، ٤

بما أن المتباينة س٢ − ٣س − ٤ < ٠ خذ قيم س التي يكون عندها منحنى الدالة التربيعية موجبًا، (فوق المحور السيني).

الحلّ هو س < −١، س > ٤



يمكننا أيضًا تمثيل مجموعة الحل على خط الأعداد



مثـــال ١٢

حلّ المتباينة ٢س٢ ≥ ١٥ − س

الحـــلّ:

أعد ترتيب الحدود للحصول على العدد صفر في أحد الطرفَين.

٢س٢ + س − ١٥ ≥ ٠

ارسم منحنى ٢س٢ + س − ١٥ = ٠

عندما ص = ٠، فإن ٢س٢ + س − ١٥ = ٠

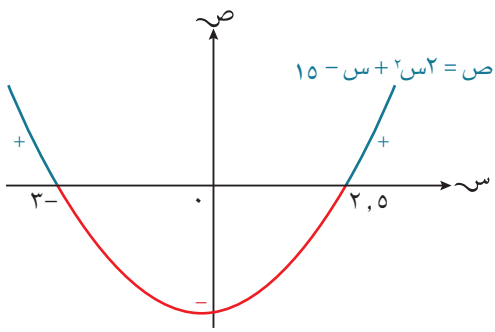
(٢س − ٥)(س + ٣) = ٠

س = ٢,٥ أو س = −٣

∴ نقاط التقاطع مع المحور السيني هي (−٣، ٠)، (٢,٥، ٠)

الحلّ هو −٣ ≥ س ≥ ٢,٥

لإيجاد حل المتباينة ٢س٢ + س − ١٥ ≥ ٠ نحتاج إلى إيجاد مجموعة قيم س التي يكون المنحنى فيها إما صفرًا أو سالبًا (أسفل المحور السيني).



ارسم منحنى ص = ٢س٢ + س − ١٥ محددًا نقاط التقاطع مع المحور السيني.

مثـــال ١٣

تتمثّل دالة الربح (ر) لشركة ما من خلال المعادلة:

$$ر = س^{٢} - ٤س - ٥$$

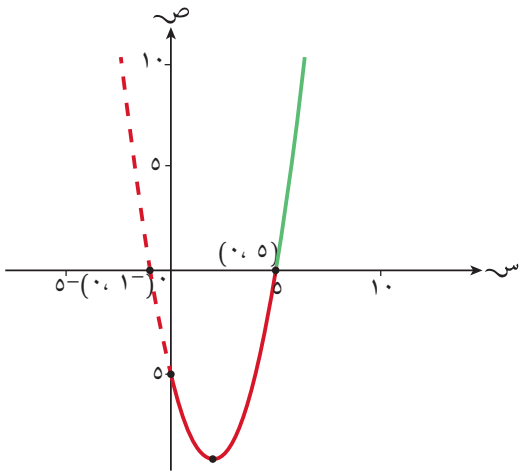
حيث س هو عدد الوحدات المبيعة بالمئات. احسب عدد الوحدات التي يتعيّن على الشركة بيعها لتحقيق ربح.

الحـــلّ:

$ر = س^{٢} - ٤س - ٥$ — حلّل إلى العوامل لحلّ المعادلة.

$ر = (س - ٥)(س + ١)$

ارسم منحنى الدالة.



يبدأ الربح عندما تبدأ نقاط منحنى الدالة التربيعية ويزيد إحداثيها الصادي عن صفر، أي يبدأ الربح بعد النقطة (٠، ٥)

يتحقق الربح بعد س = ٥

وبما أن س تمثل عدد الوحدات المبيعة بالمئات

إذن ستحقق الشركة ربحًا عندما يتم بيع أكثر من ٥٠٠ منتج (٥ × ١٠٠)

مساعدة

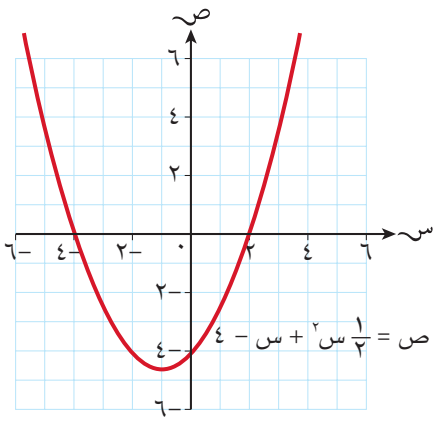
يتحقق الربح بعد أن تبيع الشركة عددا من الوحدات يغطى تكلفة تصنيع كامل الوحدات

أي أن الربح (ر) يبدأ يزيد عن صفر.

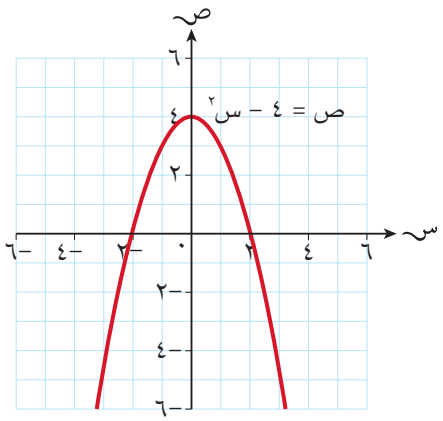
تمارين ١-٣

١) استخدم كل منحنى للدوال التربيعية الآتية لتحدّد المنطقة التي تحقّق المتباينة المعطاة:

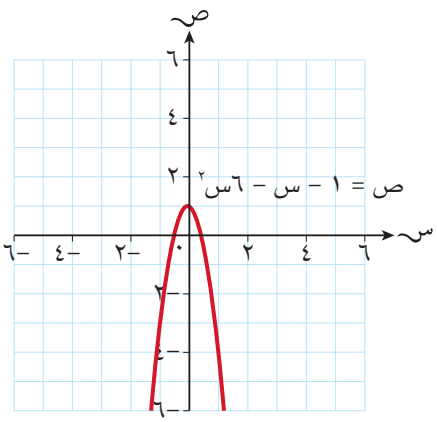
أ) $\frac{١}{٢}س^{٢} + س - ٤ \geq ٠$



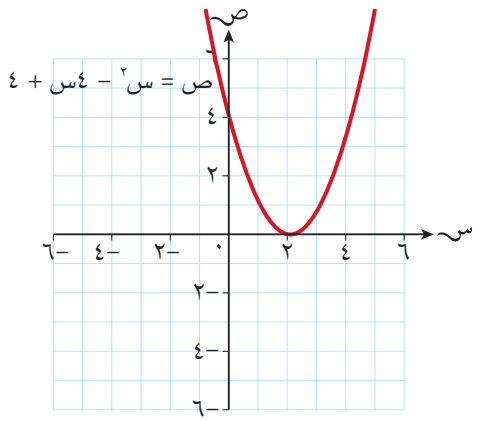
ب) $٤ - س^{٢} > ٠$



ج) $١ - س - ٦س^{٢} \leq ٠$



د) $س^{٢} - ٤س + ٤ < ٠$



٢) حلّ كل متباينة من المتباينات الآتية:

أ) $(س + ٣)(س - ٤) < ٠$

ب) $(س - ٥)(س - ١) \leq ٠$

ج) $(س - ٣)(س + ٧) \geq ٠$

د) $س(س - ٥) > ٠$

هـ) $(٢س + ١)(س - ٤) > ٠$

و) $(٣ - س)(س + ١) \leq ٠$

ز) $(٢س + ٣)(س - ٥) > ٠$

ح) $(س - ٥)^{٢} \geq ٠$

ط) $(س - ٣)^{٢} \leq ٠$

٣) حلّ كل متباينة من المتباينات الآتية:

أ) $س^{٢} + ٥س - ١٤ > ٠$

ب) $-س^{٢} - س + ٦ \geq ٠$

ج) $س^{٢} - ٩س + ٢٠ \geq ٠$

د) $س^{٢} + ٢س - ٤٨ < ٠$

هـ) $٢س^{٢} - س - ١٥ \leq ٠$

و) $٥س^{٢} + ٩س + ٤ < ٠$

٤) حلّ كل متباينة من المتباينات الآتية:

أ) $س^{٢} > ١٨ - ٣س$

ب) $١٢س > س^{٢} + ٣٥$

ج) $س(٣ - ٢س) \geq ١$

د) $س^{٢} + ٤س > ٣(س + ٢)$

هـ) $(س + ٣)(١ - س) > س - ١$

٥) يتمثل الارتفاع الرأسي (ع) للعبة طائرة عندما تطير بالمعادلة:

$ع = ٥ن - ن^{٢}$

حيث ن الزمن (بالثواني) منذ بداية طيران الطائرة. كم ثانية بقيت الطائرة على ارتفاع أعلى من ٤ م؟

١-٤ جذور المعادلة التربيعية

درست في الفصل الدراسي الثاني من الصف العاشر، الوحدة التاسعة كيفية حلّ المعادلات التربيعية باستخدام الصيغة التربيعية.

الصيغة التربيعية هي س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أجـ}}{٢أ}$ ’وتسمى النواتج **جذورًا** **roots** للمعادلة‘ .

س^٢ + ٢س − ٨ = ٠	س^٢ + ٦س + ٩ = ٠	س^٢ + ٢س + ٦ = ٠
$\frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤ \times ١ \times (-٨)}}{١ \times ٢}$	$\frac{-٦ \pm \sqrt{٦^٢ - ٤ \times ١ \times ٩}}{١ \times ٢}$	$\frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤ \times ١ \times ٦}}{١ \times ٢}$
$\frac{-٢ \pm \sqrt{٣٦}}{٢}$	$\frac{-٦ \pm \sqrt{٠}}{٢}$	$\frac{-٢ \pm \sqrt{-٢٠}}{٢}$
س = ٢ أو س = −٤	س = −٣ أو س = −٣	لا توجد جذر حقيقي
جذران حقيقيان مختلفان	**جذران حقيقيان متساويان**	**لا توجد جذور حقيقية**

يسمّى الجزء تحت الجذر التربيعي في الصيغة التربيعية **المميّز** **discriminant**.

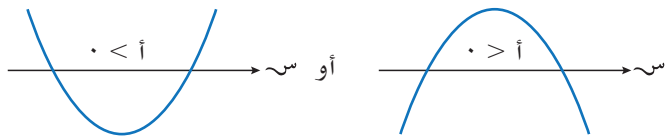
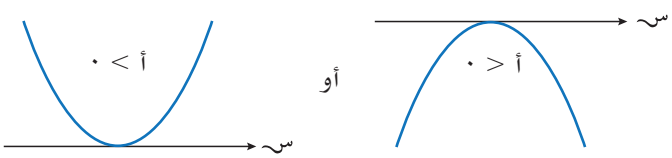
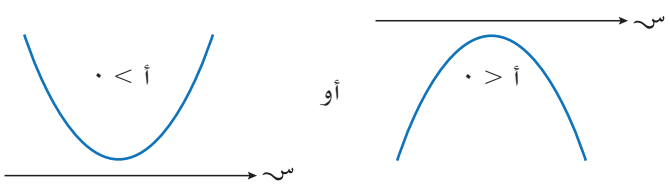
نتيجة ٢

مميّز المعادلة أس^٢ + ب س + جـ = ٠ هو ب^٢ − ٤أجـ

تدل إشارة المميّز (موجبة كانت أو صفرًا أو سالبة) على عدد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية.

ب^٢ − ٤أجـ	نوع الجذور
٠ <	جذران حقيقيان مختلفان
٠ =	جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر)
٠ >	لا توجد جذور حقيقية

يوجد رابط بين عدد جذور المعادلة التربيعية أس^٢ + ب س + جـ = ٠ ونقاط تقاطع منحنى الدالة ص = أس^٢ + ب س + جـ مع محور السينات.

ب^{٢} − ٤أجـ	نوع جذور المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠	شكل منحنى الدالة ص = أس^{٢} + ب س + جـ
< ٠	جذران حقيقيان مختلفان	 يقطع المنحنى المحور السيني في نقطتَين مختلفتَين
= ٠	جذران حقيقيان متساويان (أو جذر حقيقي واحد مكرّر)	 يمسّ المنحنى محور السينات في نقطة واحدة.
> ٠	لا توجد جذور حقيقية	 يقع المنحنى فوق محور السينات أو تحت محور السينات بشكل كامل.

مثـال ١٤

استخدم المميّز لتحدّد عدد الجذور الحقيقية لكل معادلة تربيعية من المعادلات الآتية:

أ) س^{٢} − ٢س + ٧ = ٠

ب) ١٠ + ٣س − س^{٢} = ٠

ج) س^{٢} = ٢٥

د) س^{٢} − ٥س + ١٥ = ٥س − ١٠

الحـلّ:

أ) أ = ١، ب = −٢، جـ = ٧ ..... احسب قيمة المميّز.

ب^{٢} − ٤أجـ = (−٢)^{٢} − ٤ × ١ × ٧ = −٢٤ < ٠

∵ ب^{٢} − ٤أجـ < ٠

∴ لا توجد جذور حقيقية.

ب $-س^{٢} + ٣س + ١٠ = ٠$ ..... من المفيد كتابة المعادلة في صورة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$أ = -١، ب = ٣، جـ = ١٠$ ..... احسب قيمة المميّز.

$ب^{٢} - ٤أ جـ = ٣^{٢} - ٤ \times -١ \times ١٠ = ٤٩ > ٠$

$\because ب^{٢} - ٤أ جـ > ٠$

$\therefore$ يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

ج $س^{٢} - ٢٥ = ٠$ ..... أعِد ترتيب المعادلة في صورة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$أ = ١، ب = ٠، جـ = -٢٥$ ..... في بعض الأحيان يمكن أن تكون قيم ب أو جـ صفرًا إن لم يوجد الحدّ س أو لم يوجد العدد الثابت. احسب قيمة المميّز.

$ب^{٢} - ٤أ جـ = ٠^{٢} - ٤ \times ١ \times -٢٥ = ١٠٠ > ٠$

$\because ب^{٢} - ٤أ جـ > ٠$

$\therefore$ يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

د $س^{٢} - ١٠س + ٢٥ = ٠$ ..... أعِد ترتيب المعادلة في صورة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$أ = ١، ب = -١٠، جـ = ٢٥$ ..... احسب قيمة المميّز.

$ب^{٢} - ٤أ جـ = (-١٠)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٢٥ = ٠$

$\because ب^{٢} - ٤أ جـ = ٠$

$\therefore$ يوجد جذران حقيقيان متساويان.

مثـــال ١٥

أوجِد قيم ك إذا كان للمعادلة $س^{٢} - ٣س + ٦ = ك(س - ٢)$ جذران متساويان.

الحـــلّ:

$س^{٢} - ٣س + ٦ = ك(س - ٢)$ ..... أعِد ترتيب المعادلة في صورة $أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠$

$س^{٢} - ٣س + ٦ - ك س + ٢ك = ٠$

$س^{٢} - (٣ + ك)س + ٦ + ٢ك = ٠$

$\because$ الجذران متساويان، لذا فإن $ب^{٢} - ٤أ جـ = ٠$ ..... استخدم المميز لتشكّل معادلة مجهولها ك

حيث أن $أ = ١، ب = -(٣ + ك)، جـ = ٦ + ٢ك$

$\therefore (٣ + ك)^{٢} - ٤ \times ١ \times (٦ + ٢ك) = ٠$

$ك^{٢} + ٦ك + ٩ - ٢٤ - ٨ك = ٠$

$ك^{٢} - ٢ك - ١٥ = ٠$ ..... حلّ المعادلة لتجد قيم ك التي تحقق المعادلة.

$(ك + ٣)(ك - ٥) = ٠$

$\therefore ك = -٣$ أو $ك = ٥$

مثـــال ١٦

أوجِد قيم ك إذا كان للمعادلة س^{٢} + (ك − ٢)س + ٤ = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

الحـــلّ:

س^{٢} + (ك − ٢)س + ٤ = ٠

∵ الجذران مختلفان، لذلك فإن ب^{٢} − ٤أ جـ > ٠ ..... استخدم المميز لتشكل معادلة مجهولها ك

(ك − ٢)^{٢} − ٤ × ١ × ٤ > ٠

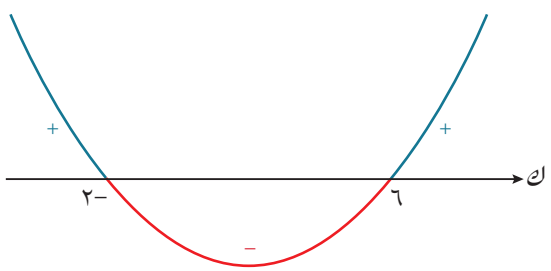
ك^{٢} − ٤ك + ٤ − ١٦ > ٠

ك^{٢} − ٤ك − ١٢ > ٠

(ك + ٢)(ك − ٦) > ٠ ..... بما أنها متباينة، يجب استخدام الطرائق التي استخدمناها في الدرس ١-٣، وذلك لإيجاد قيم س التي تتضمّن رسم المنحنى لتحديد المنطقة حيث المتباينة > ٠

من الرسم نلاحظ أن

ك > −٢ أو ك > ٦



تمارين ١-٤

١) حدّد ما إذا كان لكل معادلة من المعادلات الآتية جذران حقيقيان مختلفان، أو جذران حقيقيان متساويان، أو لا جذور حقيقية لها:

أ) س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠

ب) س^{٢} + ٤س − ٢١ = ٠

ج) س^{٢} + ٩س + ١ = ٠

د) س^{٢} − ٣س + ١٥ = ٠

هـ) س^{٢} − ٦س + ٢ = ٠

و) ٤س^{٢} + ٢٠س + ٢٥ = ٠

ز) ٣س^{٢} + ٢س + ٧ = ٠

ح) ٥س^{٢} − ٢س − ٩ = ٠

٢) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة س^{٢} + ك س + ٩ = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

٣) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة ك س^{٢} − ٤س + ٨ = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

٤) أوجِد قيم ك، حيث لا جذور حقيقية للمعادلة ٣س^{٢} + ٢س + ك = ٠

٥) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة (ك + ١)س^{٢} + ك س − ٢ك = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

٦) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة ك $س^{٢}$ + ٢(ك + ٣)س + ك = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

٧) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة ٣$س^{٢}$ − ٤س + ٥ − ك = ٠ جذران حقيقيان مختلفان.

٨) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة ٤$س^{٢}$ − (ك − ٢)س + ٩ = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

٩) أوجِد قيم ك، حيث للمعادلة ٤$س^{٢}$ + ٤(ك − ٢)س + ك = ٠ جذران حقيقيان متساويان.

١٠) بيّن أن جذرَي المعادلة $س^{٢}$ + (ل − ٢)س − ٢ل = ٠ حقيقيان ومختلفان لكل قيم ل الحقيقية.

١١) بيّن أن جذرَي المعادلة ك $س^{٢}$ + ٥س − ٢ك = ٠ حقيقيان ومختلفان لكل قيم ك الحقيقية.

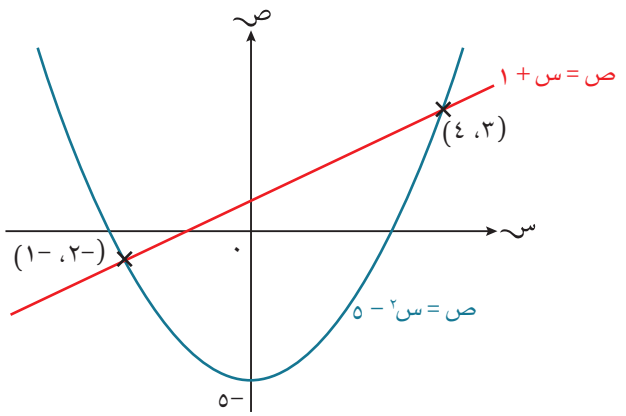
١٢) تمثّل الدالة:

$$ر = س^{٢} - ٨س + ١٢$$

إجمالي ربح (ر) شركة (بمئات آلاف الريالات العُمانية)، حيث س عدد الأيام منذ بدء العمل في السنة الأولى. وضّح متى تبدأ الشركة تحقق ربحًا في السنة الأولى.

١-٥ حلّ المعادلات الآنية (معادلة خطّية ومعادلة تربيعية)

سوف نتعلّم في هذا الدرس كيف نحلّ معادلتَين آنيتَين إحداهما خطيّة والأخرى معادلة تربيعية.



يُبيّن الشكل أعلاه التمثيل البياني للدالتَين ص = س + ١، ص = س٢ − ٥

إحداثيات نقطتَي تقاطع الخط المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية هما (−٢، −١)، (٣، ٤)

هذا يعني أن س = −٢، ص = −١ أو س = ٣، ص = ٤ حلول للمعادلتَين الآنيتَين ص = س + ١، ص = س٢ − ٥

يُمكن أيضًا إيجاد الحلول جبريًّا:

ص = س٢ − ٥ ..... (١)

ص = س + ١ ..... (٢)

عوّض عن قيمة ص من المعادلة (٢) في المعادلة (١)

س + ١ = س٢ − ٥ أعد ترتيب المعادلة.

س٢ − س − ٦ = ٠ حلّل إلى العوامل.

(س + ٢)(س − ٣) = ٠

س = −٢ أو س = ٣

عوّض عن قيمة س = −٢ في المعادلة (٢) للحصول على ص = −٢ + ١ = −١

عوّض عن قيمة س = ٣ في المعادلة (٢) للحصول على ص = ٣ + ١ = ٤

الحلول هي: س = −٢، ص = −١ أو س = ٣، ص = ٤

إحداثيات نقاط تقاطع الخط المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية هي (−٢، −١) و (٣، ٤)

مثـــال ١٧

حل المعادلتَين الآتيتَين آنيًّا:

ص = س + ١٢

ص = س^{٢}

الحـــلّ:

ص = س + ١٢ ..... (١) ..... سمّ المعادلتَين (١)، (٢)

ص = س^{٢} ..... (٢)

س + ١٢ = س^{٢} ..... عوّض عن ص من المعادلة (١) في المعادلة (٢)

س^{٢} − س − ١٢ = ٠ ..... أعد الترتيب للحصول على صفر في الطرف الأيسر.

(س + ٣)(س − ٤) = ٠ ..... حلّل إلى العوامل.

س = −٣ أو س = ٤ ..... حلّ لتجد قيم س

عندما س = −٣، فإن ص = −٣ + ١٢ = ٩ ..... عوّض عن قيم س في المعادلة (١) لتجد قيم ص

عندما س = ٤، فإن ص = ٤ + ١٢ = ١٦

الحلول هي س = −٣، ص = ٩ و س = ٤، ص = ١٦

يعني ذلك أن منحنيَي ص = س + ١٢ و ص = س^{٢} يتقاطعان عند (−٣، ٩)، (٤، ١٦)

تمارين ١-٥

حلَّ كلّ زوج من أزواج المعادلات الآنيّة الآتية:

١) ص = س^{٢}

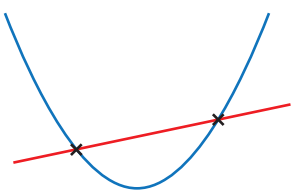
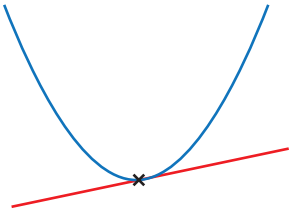
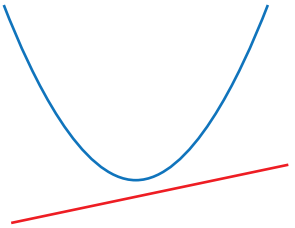
ص = س + ٦

٢) س + ٣ص = ٠

٢س^{٢} + ٣ص = ١

١-٦ التقاطع بين مستقيم ومنحنى الدالة التربيعية

توجد ثلاث حالات ممكنة عندما يتقاطع خطّ مستقيم مع منحنى الدالة التربيعية.

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
توجد نقطتا تقاطع	توجد نقطة تقاطع واحدة	لا توجد نقطة تقاطع
يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين.	يمس المستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ المستقيم مماسّ **tangent** للمنحنى.	لا يقطع المستقيم المنحنى.

لقد درست كيف تجد نقاط تقاطع المستقيم ص = س – ٦ مع منحنى الدالة التربيعية ص = س^{٢} – ٣س – ٢ بحلّ المعادلتَين آنيًّا.

ستحصل على س^{٢} – ٣س – ٢ = س – ٦

س^{٢} – ٤س + ٤ = ٠

يمكن حلّ المعادلة التربيعية الناتجة بالتحليل إلى العوامل لتحديد قيم س لإحداثيات نقاط التقاطع.

(س – ٢)(س – ٢) = ٠ وعليه، يكون س = ٢ ومنه ص = ٢ – ٦ = –٤ حيث يعطي نقطة تقاطع واحدة وهي (٢، –٤)، أي إن المستقيم مماسّ لمنحنى الدالة التربيعية.

يمكن أن نحدّد عدد نقاط التقاطع باستخدام المميّز ومن دون إيجاد جذور معادلة تربيعية أو نقاط التقاطع.

ب^{٢} – ٤ أجـ = (–٤)^{٢} – ٤ × ١ × ٤ = ٠

يشير ذلك إلى وجود جذرَين حقيقيَّين متساويَين للمعادلة، أي يوجد حلّ وحيد، ما يعني وجود نقطة تقاطع واحدة فقط؛ وعليه، يكون المستقيم مماسًا لمنحنى الدالة التربيعية.

يعتمد عدد نقاط التقاطع على قيمة ب^{٢} – ٤ أجـ

الحالات المختلفة معطاة في الجدول الآتي:

نتيجة ٣

يساعدنا مميز المعادلة التربيعية الناتجة من مساواة الدالة التربيعية بخط مستقيم على معرفة عدد نقاط تقاطعهما. الحالات الثلاثة الممكنة مبيّنة في الجدول الآتي:

ب^{٢} − ٤أجـ	نوع الجذور	عدد نقاط التقاطع
< ٠	جذران حقيقيان مختلفان	نقطتا تقاطع مختلفتان
$= ٠$	جذران حقيقيان متساويان (جذر مكرّر)	نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ)
> ٠	لا توجد جذور حقيقية	لا توجد نقاط تقاطع

يشترط للحصول على جذرَين حقيقيَّين في المعادلة التربيعية أن يكون ب^{٢} − ٤ أ جـ ≥ ٠

مثـــال ١٨

بيّن أن المستقيم ص = $\frac{١}{٢}$ س − ٣ يقطع المنحنى ص = س^{٢} + ٤س − ٣ في نقطتَين مختلفتَين.

الحـــلّ:

$\frac{١}{٢}$ س − ٣ = س^{٢} + ٤س − ٣ ..... ساوِ بين المعادلتَين، وأعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

س − ٦ = ٢س^{٢} + ٨س − ٦

٢س^{٢} + ٧س = ٠ ..... احسب المميّز لتحدّد عدد نقاط التقاطع.

ب^{٢} − ٤ أجـ = ٧^{٢} − ٤ × ٤ × ٠ = ٤٩ > ٠

∵ المميّز > صفر

∴ يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين.

مثـــال ١٩

أوجد قيمة ك حيث المستقيم ص = ٢س + ك مماس للمنحنى ص = س^{٢} − ٤س + ٤

الحـــلّ:

س^{٢} − ٤س + ٤ = ٢س + ك ..... أعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

س^{٢} − ٦س + (٤ − ك) = ٠

∵ المستقيم مماس للمنحنى، فإن

ب^{٢} − ٤ أجـ = ٠ ..... استخدم الشرط على المميّز لتكتب معادلة مجهولها ك، ثم حلّها.

(−٦)^{٢} − ٤ × ١ × (٤ − ك) = ٠

٣٦ − ١٦ + ٤ك = ٠

ك = −٥

مثـــال ٢٠

أوجِد مجموعة قيم ك بحيث يقطع المستقيم ص = س − ٥ المنحنى ص = ك س^{٢} − ٦ في نقطتَين مختلفتَين.

الحـــلّ:

ك س^{٢} − ٦ = س − ٥ ..... أعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

ك س^{٢} − س − ١ = ٠

∵ المستقيم يقطع المنحنى في نقطتَين مختلفتَين، فإن

ب^{٢} − ٤ أجـ > ٠ ..... استخدم الشرط على المميّز لتكتب معادلة مجهولها ك، ثم حلّها.

(−١)^{٢} − ٤ × ك × (−١) > ٠

١ + ٤ك > ٠

ك > − $\frac{١}{٤}$ ..... في هذه الحالة، نحتاج إلى عدم أخذ ك = ٠ بعين الاعتبار لأن شكل المعادلة سيكون ص = −٦ وهي معادلة غير تربيعية، أي عدم جواز استخدام المميز.

ك > − $\frac{١}{٤}$، ك ≠ ٠

مثـــال ٢١

أوجِد مجموعة قيم ك بحيث لا يقطع المستقيم ص = ك س − ٣ المنحنى ص = س^{٢} − ٢س + ١

الحـــلّ:

س^{٢} − ٢س + ١ = ك س − ٣ ..... أعِد ترتيب المعادلة في صورة أ س^{٢} + ب س + جـ = ٠

س^{٢} − س(٢ + ك) + ٤ = ٠

∵ المستقيم والمنحنى لا يتقاطعان،

∴ ب^{٢} − ٤ أجـ < ٠ ..... استخدم الشرط على المميّز لتكتب معادلة مجهولها ك، ثم حلّها.

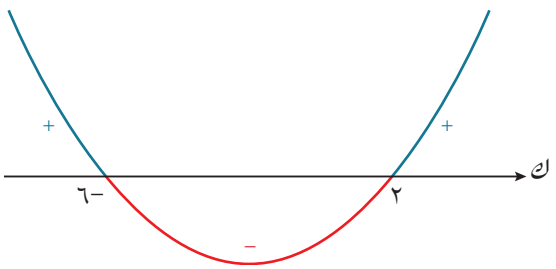
(٢ + ك)^{٢} − ٤ × ١ × ٤ < ٠

ك^{٢} + ٤ك − ١٢ < ٠ ..... استخدم الطرائق التي استخدمناها في الدرس ١-٣ لحلّ المتباينة التربيعية، وذلك باعتماد على رسم المنحنى لتحديد منطقة قيم ك

(ك + ٦)(ك − ٢) < ٠

من خلال الرسم،

−٦ < ك < ٢



تمارين ١-٦

١) في كل حالة من الحالات الآتية، حدّد عدد نقاط التقاطع بين المستقيم ومنحنى الدالة التربيعية:

أ) ص = ٤س − ٣ ، ص = س^{٢} − ٥س + ٢

ب) ص = ٣ − ٢س ، ص = ٢س^{٢} + ٣س + ٧

ج) ص = ٨س + ٣ ، ص = ١ − ٢س^{٢}

د) س + ص = ٣ ، ص = ٢ − ٣س − ٣س^{٢}

٢) أوجِد قيم ك حيث المستقيم ص = ك س + ١ مماس للمنحنى ص = ٢س^{٢} + س + ٣

٣) أوجِد قيمة ك حيث المحور السيني مماس للمنحنى ص = س^{٢} + (٣ − ك)س − (٤ك + ٣).

٤) أوجِد قيم العدد الثابت جـ حيث المستقيم ص = س + جـ مماس للمنحنى ص = ٣س + $\frac{٢}{س}$

٥) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يقطع المستقيم ص = ٣س + ١ المنحنى ص = س^{٢} + ك س + ٢ في نقطتَين مختلفتَين.

٦) المستقيم ص = ٢س + ك مماس للمنحنى س^{٢} + ٢س ص + ٢٠ = ٠

أ) أوجِد القيم الممكنة للعدد ك

ب) أوجِد لكل قيمة من قيم ك التي وجدتها في الجزئية (أ) إحداثيات نقطة تقاطع المماس مع المنحنى.

٧) أوجِد قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ك س − ١٠ مع المنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ١٠س

٨) أوجِد مجموعة قيم م حيث لا يقطع المستقيم ص = م س − ٥ المنحنى ص = س^{٢} − ٥س + ٤

٩) أوجِد قيم م الممكنة حيث يكون المستقيم ص = م س + ٦ مماسًا للمنحنى ص = س^{٢} − ٤س + ٧

١٠) تمثل الدالة:

ص = س^{٢} − ٧س + ك

مسار قارب حول جزيرة، حيث تمّ أخذ الإحداثيات بالاعتماد على أن إحداثيات الجزيرة هي نقطة الأصل (٠، ٠). يجتاز القارب حدود المنطقة بعد الجزيرة عند المستقيم ص = س − ٦؛ أوجِد قيم الثابت ك حتى لا يجتاز القارب خطّ الحدود البحرية.

١١) مسار جسم إلى الأعلى باتجاه الجزء الموجب لمحور السينات من نقطة ثابتة يعطى بالدالة:

ص = س(ك − س)

حيث يعطي الإحداثي السيني المسافة الأفقية، ويعطي الإحداثي الصادي المسافة الرأسية من نقطة ثابتة. ما قيم الثابت ك بحيث لا يصطدم الجسم مع السطح المائل الذي يمكن تمثيله بالمستقيم ص = ٩ − ٢س؟

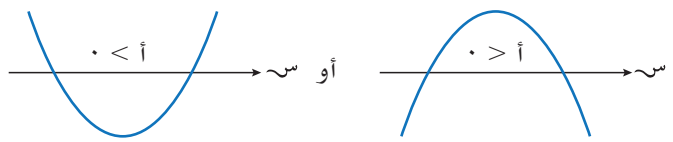
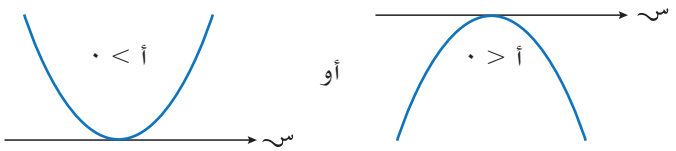
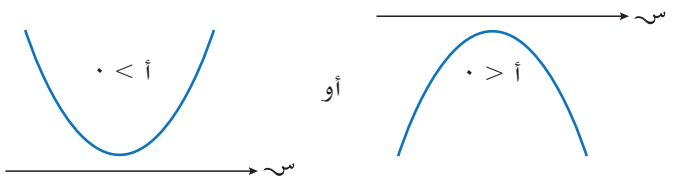
قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

رسم الدوال التربيعية

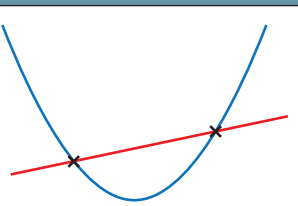
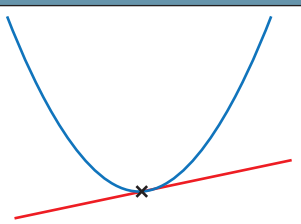
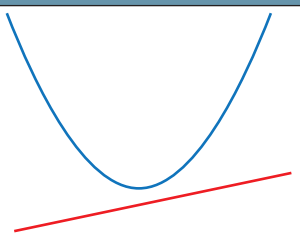
لرسم المنحنى التربيعي، نحدّد الأجزاء المقطوعة من المحورَين وإحداثيات نقطة التحوّل.

- لإيجاد الجزء المقطوع من المحور السيني، اجعل ص = ٠ وحلّ المعادلة الناتجة باستخدام التحليل إلى العوامل.
- لإيجاد الجزء المقطوع من المحور الصادي، اجعل س = ٠ واحسب ص.
- أوجد إحداثيات نقطة التحوّل عبر تحديد معادلة محور التماثل باستخدام الجزء المقطوع من المحور السيني، ثم تحديد نوع المنحنى للأعلى أم للأسفل باستخدام معامل $س^{٢}$

الدالة التربيعية ($أس^{٢}$ + ب س + جـ = ٠) والمنحنى المناظر لها ($ص = أس^{٢} + ب س + جـ$)

$ب^{٢} - ٤أجـ$	نوع جذور المعادلة $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$	شكل منحنى الدالة $ص = أس^{٢} + ب س + جـ$
< ٠	جذران حقيقيان مختلفان	 يقطع المنحنى المحور السيني في نقطتَين مختلفتَين
$= ٠$	جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد مكرّر)	 يمسّ المنحنى محور السينات في نقطة واحدة.
> ٠	لا توجد جذور حقيقية	 يقع المنحنى فوق محور السينات أو تحت محور السينات بشكل كامل.

التمثيل البياني التربيعي والمستقيم

الحالة الأولى	الحالة الثانية	الحالة الثالثة
		
توجد نقطتا تقاطع	توجد نقطة تقاطع واحدة	لا توجد نقطة تقاطع
يقطع المستقيم المنحنى في نقطتَين مختلفتَين.	يمس المستقيم المنحنى في نقطة واحدة فقط، ما يعني أنّ المستقيم مماسّ للمنحنى.	لا يقطع المستقيم المنحنى.

يكون حلّ معادلة تربيعية مع معادلة مستقيم آنيًّا معادلة تربيعية في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

يعطي المميّز ب^{٢} − ٤أجـ معلومات حول عدد جذور المعادلة الناتجة وحول نقاط التقاطع بين منحنى الدالة التربيعية والمستقيم.

يساعدنا مميّز المعادلة الناتجة على معرفة عدد نقاط تقاطعهما. الحالات الثلاث الممكنة مبيّنة في الجدول الآتي:

ب^{٢} − ٤أجـ	نوع الجذور	عدد نقاط التقاطع
٠ <	جذران حقيقيان مختلفان	نقطتا تقاطع مختلفتان
٠ =	جذران حقيقيان متساويان (جذر مكرّر)	نقطة تقاطع واحدة (المستقيم مماسّ)
٠ >	لا توجد جذور حقيقية	لا توجد نقاط تقاطع

شرط حصول المعادلة التربيعية على جذور حقيقية هو ب^{٢} − ٤أ جـ ⩾ ٠

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى

١) أوجِد مجموعة قيم ك التي لا يتقاطع عندها ص = ك(٤س − ٣) مع المنحنى ص = ٤س^{٢} + ٨س − ٨

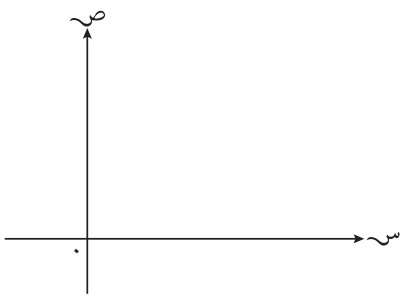
٢) أوجِد مجموعة قيم س حيث س(س + ٢) > س

٣) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يقع المنحنى ص = (ك + ١)س^{٢} − ٣س + (ك + ١) تحت المحور السيني.

٤) أوجِد مجموعة قيم س حيث س^{٢} > ٦ − ٥س

٥) أوجِد قيم ك حيث يكون المستقيم ص = ك − ٦س مماسًا للمنحنى ص = س(٢س + ك).

٦) المعطى ص = ١٠ + ٣س − س^{٢}



أ) ارسم على المستوى الإحداثي المجاور المنحنى، محددًا إحداثيات النقاط التي يتقاطع فيها المنحنى مع المحورَين.

ب) احسب إحداثيات نقطة التحوّل.

٧) اكتب ك بدلالة جـ علمًا أن المستقيم ص = ٣س + جـ مماس للمنحنى ص = س^{٢} + ٩س + ك

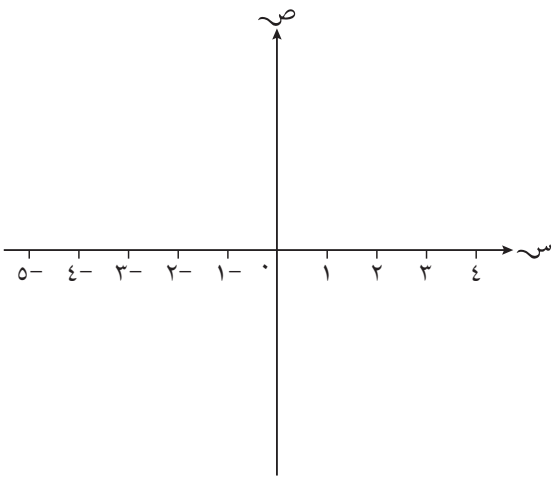
٨) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ٢س − ٥ مع المنحنى ص = س^{٢} + ك س + ١١ في نقطتَين مختلفتَين.

٩) أوجِد مجموعة قيم م حيث يتقاطع المستقيم ص = م س − ٢ مع المنحنى ص = س^{٢} + ٨س + ٧ في نقطتَين مختلفتَين.

١٠) أ) انسخ المستوى الإحداثي المجاور وارسم المنحنى

ص = (س − ٢)(س + ٣) حيث −٥ ⩽ س ⩽ ٤،

ثم أوجِد إحداثيات نقاط التقاطع بين المنحنى والمحورَين.



ب) أوجِد إحداثيات نقطة التحوّل، محدّدًا طبيعتها.

ج) إذا علمت أن ك عدد ثابت موجب، فأوجِد مجموعة قيم ك حيث للمعادلة (س − ٢)(س + ٣) = ك جذران مختلفان.

١١) أوجِد قيمة ك حيث المنحنى ص = ٢س^{٢} − ٣س + ك:

أ يمرّ في النقطة (٤، −٧).

ب يتقاطع مع المحور السيني في نقطة واحدة فقط.

١٢) أوجِد مجموعة قيم ك حيث للمعادلة ك س^{٢} + ك = ٨ س − ٢س ك جذران حقيقيان مختلفان.

١٣) أ أوجِد مجموعة قيم س حيث ٤س^{٢} + ١٩س − ٥ ⩾ ٠

ب ١) ارسم المنحنى ص = ٩ − ٨س − س^{٢}، محددًا إحداثيات كل نقاط التقاطع مع المحورَين ونقطة التحوّل.

٢) اكتب القيمة العظمى لـ ٩ − ٨س − س^{٢}

١٤) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ك س − ٣ مع المنحنى ص = س^{٢} − ٩س في نقطتَين مختلفتَين.

١٥) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يتقاطع المستقيم ص = ٢س + ك مع المنحنى ص = ١ + ٢ ك س − س^{٢} في نقطتَين مختلفتَين.

١٦) أ أوجِد إحداثيات رأس المنحنى ص = ٤س^{٢} − ٨س + ٣

ب أوجِد قيم العدد الثابت ك حيث المستقيم ص = ك س + ٣ مماس للمنحنى ص = ٤س^{٢} − ٨س + ٣

١٧) منحنى معادلته ص = ٥ − ٢س + س^{٢} ومستقيم معادلته ص = ٢س + ك، حيث ك عدد ثابت.

أ بيّن أن الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع بين المنحنى والمستقيم تحقّق المعادلة س^{٢} − ٤س + (٥ − ك) = ٠

ب لقيمة محدّدة للعدد ك، يتقاطع المنحنى مع المستقيم في نقطتَين مختلفتَين أ، ب، حيث إحداثيات أ هي (−٢، ١٣). أوجِد إحداثيات النقطة ب

ج في حال كان المستقيم مماسًا للمنحنى عند النقطة ج، أوجِد قيمة ك وإحداثيات نقطة التماس.

١٨) منحنى معادلته ص = س^{٢} − ٥س + ٧ ومستقيم معادلته ص = ٢س − ٣

أ أوجِد إحداثيات نقاط التقاطع بين المستقيم والمنحنى.

ب أوجِد مجموعة قيم س التي تحقّق المتباينة س^{٢} − ٥س + ٧ > ٢س − ٣

١٩) منحنى معادلته ص = ١٠س − س^{٢}

أ احسب إحداثيات رأس المنحنى.

ب أوجِد مجموعة قيم س حيث ص ⩾ ٩

٢٠) تمّ رمي كرة في الهواء. يمكن تمثيل ارتفاعها عن الأرض ع متر بالمعادلة:

$ع = ٥ + ٤ن - ن^{٢}$،

حيث ن الزمن بالدقائق من لحظة رمي الكرة. ما الارتفاع الأقصى الذي تصل إليه الكرة؟

٢١) يُعطى ارتفاع طائر عن سطح البحر ع مقيسة بمئات الأمتار بالمعادلة:

$ع = ٢٧ + ٣ن - ٢ن^{٢}$

حيث ن الزمن بالساعة من لحظة تسجيل ارتفاع الطائر. أوجِد أقصى ارتفاع يصل إليه الطائر عن سطح الأرض في رحلته.

٢٢) تمّ بناء غرفة بحيث تعطى مساحتها بالدالة:

$م = ١٠س - س^{٢}$

حيث س، (١٠ - س) بُعدا الغرفة بالمتر. أوجِد أكبر مساحة ممكنة للغرفة واكتب بُعدَيها اللذَين يعطيان هذه المساحة.

٢٣) تمثّل المعادلة:

$ر = ١٥س - س^{٢}$

ربح مصنع (بآلاف الريالات العُمانية)، حيث س كمية القطع المنتجة والمبيعة (بالمئات). كم قطعة يجب أن تباع ليكون الربح ٥٦٠٠٠ ريال عُماني؟

المحتويات

المقدمة ..... **xiii**

الوحدة الثانية: الدوال

٢–١ تعريف الدوال ومجالها ومداها ٥٥

٢–٢ الدوال المركّبة ٦٧

٢–٣ الدوال العكسية ٧٣

٢–٤ منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية ٧٩

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثانية ٨٥

المقدمة

يُعدّ فهم علم الرياضيات والقدرة على العمل به مهارة حياتية مهمة، إضافة إلى أن كثيرًا من الوظائف تتطلب فهمًا رياضيًّا جيدًا. فكلنا نستخدم علم الرياضيات في أساسيات حياتنا اليومية، حيث إننا نستخدم معرفتنا الرياضية في تحديد الميزانية عندما نخطط لعطلة، وفي تصميم غرفتنا لمعرفة حاجتها إلى الطلاء لطلائها، أو حتى عند تعديل وصفة طبخ لتكفي عددًا أكبر من الأشخاص.

إضافة إلى هذه المهارات الحياتية، يساعد علم الرياضيات الفرد على تطوير منهجية خاصة للتفكير، بما في ذلك تطوير مهاراته في حل المسألة ومهاراته في أي عمل آخر يقوم به.

من المحتمل ألّا يكون لديك فهم واضح لماهية 'المسألة الرياضية'. إنها إشكالية جديرة بالاهتمام، وكثير من الناس حاروا في شأنها. وقد ترغب في أن يكون لك رأي خاص حول هذه الإشكالية، التي ستشهد على تطورها مع تقدمك في دراسة هذا الكتاب. إحدى الأفكار المحتملة أن المسألة الرياضية هي عبارة عن سؤال رياضي لا تعرف إجابته مباشرة، وإلّا يصبح 'تمرينًا' لا مسألة. فالمسألة تستغرق وقتًا لحلها، وقد تضطر إلى تجريب أساليب وأفكار متعددة، بمفردك أو بالتشارك مع الآخرين، حتى تتوصل إلى طريقة حلها.

سيساعدك هذا الكتاب في تعلم مبادئ الرياضيات اللازمة لإجراء الاختبارات وتطوير مهاراتك في حلّ المسألة وفي حل مسائل تتعلق بمواقف من الحياة اليومية.

وحيث إنك تعوّدت على التواصل مع الآخرين سواء مشافهة أو كتابة أو رسمًا، فإنك من خلال دراسة هذا الكتاب ستتمكن من التواصل باستخدام الرياضيات. وهذا يعني عرض الحلول بخطوات واضحة بحيث يتمكن أيّ شخص آخر من متابعة هذه الحلول، أو مناقشة هذه الأفكار الرياضية مع زملائه. إن استكشاف المسائل ومناقشتها بالشراكة مع الآخرين سيساعدك على تطوير إدراكك، كما أن مناقشة تسلسل أفكارك وتوضيحها سيساعدك ويساعد زملاءك على تطوير مهارة الإقناع بالحجة والبرهان للمسائل.

إضافة إلى ذلك يمكن النظر إلى التمثيل الرياضي كعبارة عن التقاء الرياضيات بالعالم الحقيقي، حيث تسمح لنا هذه التمثيلات الرياضية بالتوقع وبفهم أفضل للواقع. إن تمثيل ظواهر الحياة اليومية باستخدام الجبر يساعدنا على القيام بتوقعات وعلى مقارنتها بالنتائج الواقعية، ومن ثم تحسين هذه التمثيلات. فقد تتوقع مثلًا أنك سَتنفق ٢٥ ريالًا عُمانيّا في يوم عطلتك، هذا يعني أنه في وقت مقداره ن يوم، ستنفَق ٢٥ن ريالًا عُمانيّا. بعد أيام قليلة يمكنك أن تقارن ما أنفقته فعلًا بهذا العدد، وتعدّل تمثيلك بناء عليه. إن الأمثلة الشائعة الشائعة في التمثيل الرياضي تتضمن التوقعات الجوية، والتغير المناخي، والتغير الديموغرافي (السكاني)، والأسواق المالية وغيرها.

يحتوي هذ الكتاب على مجموعة متنوعة من الميزات الجديدة، من أجل دعمك في عملية التعلم، منها:

- نشاطات استكشف: تم تصميم هذه الأنشطة لتقديم مسائل للاستخدام في الفصول الدراسية التي تتطلب التفكير والمناقشات. فقد يقدّم بعض الطلبة فكرة جديدة، ويقوم بعضهم الآخر بتوسيع أفكار زميله وإثرائها، بينما يمكن للآخرين دعم المقترحات. غالبًا ما تثمر الأنشطة نتائج أفضل إذا اقتصر العمل على مجموعات

صغيرة، ثم مشاركة الأفكار مع الجميع. فهذه الطريقة تبعد الملل والرتابة عن الطلبة، وتعمد إلى تطوير مهارات حل المسائل وبناء الثقة في التعامل مع الأسئلة غير المألوفة.

- الأسئلة المصنفة برمز النجمة '★'، '★' أو '★' هي أسئلة تركز بشكل خاص على 'البرهان' أو 'التمثيل' أو 'حل المسائل'، وهي مصممة لمساعدتك في التحضير الجيد على الأسلوب الجديد في الاختبارات. وربما لا تكون أسئلة أصعب من الأسئلة الأخرى الواردة في التمرين، وقد تتضمن هذه التمارين العديد من التطبيقات الحياتية اليومية مثل التي يمكن أن تواجهها في حياتك الواقعية، وهنا تكمن ضرورة الرياضيات، حيث تحتاج إلى حل تمارين تتعلق بالأمور المالية والتجارية والارتفاعات وغيرها.
- التمارين المتنوعة الكثيرة التي تساعد الطلبة على تكرار الأهداف المعروضة في الدرس، وقد جاءت هذه التمارين في معظم الأحيان متدرجة من السهل إلى الصعب حيث يستطيع الطالب امتلاك المفهوم في بدايتها، ثم يقوم بالتحليلات الرياضية المطلوبة عند الانتهاء منها.
- تَستخدم لغة الأقسام التوضيحية عبارات مثل 'نحن' و'لنا' و'لدينا' ... أكثر بكثير ممّا كانت عليه في الكتب الدراسية السابقة. هذه اللغة تحفزك على أن تكون مشاركًا نشطًا بدلًا من أن تكون مراقبًا فقط. وهنا ما عليك سوى اتباع التعليمات ('قم بتنفيذ ذاك، ثم تنفيذ ذلك'...). فهي الطريقة التي يكتب بها علماء الرياضيات معلوماتهم. ستواجه تحديات (أسئلة غير مألوفة) فإذا كنت متعوّدًا على أن تكون نشطًا في الرياضيات، فستكون لديك فرصة أفضل لتصبح قادرًا على التعامل مع هذه التحديات بنجاح.

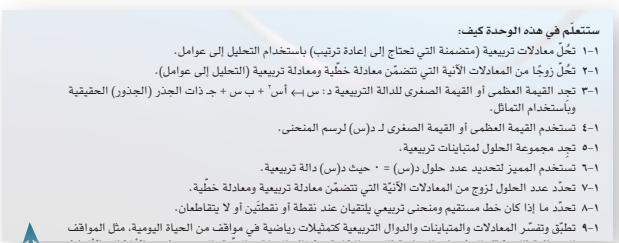
توجد أيضًا في أقسام متنوعة من الكتاب، روابط إلكترونية لمصادر الرياضيات ذات الصلة، والتي يمكن تصفّحها على موقع الإنترنت المجاني undergroundmathematics.org. يهدف الموقع Uunderground Mathematics إلى إنتاج مواد غنية ومشوّقة لجميع طلبة الرياضيات. وتتّصف هذه الموارد عالية الجودة بالقدرة على تطوير مهارات التفكير الرياضي لديك، وبوفرة التقنيات في وقت واحد، لذلك نشجعك على الاستفادة منها بشكل جيد.

ونحن إذ نتمنى لك كل النجاح، نرجو أن تكون بداية في هذا الكتاب انطلاقة جيدة نحو مزيد من التقدم.

كيف تستخدم هذا الكتاب؟

سوف تلاحظ خلال هذا الكتاب ميزات خاصة تم تصميمها لتساعدك على التعلم.

يؤمن هذا القسم صورة مختصرة لهذه الميزات.



ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

١-١ تحلّ معادلات تربيعية (متضمنة التي تحتاج إلى إعادة ترتيب) باستخدام التحليل إلى عوامل.

١-٢ تحلّ زوجًا من المعادلات الآنية التي تتضمّن معادلة خطّية ومعادلة تربيعية (التحليل إلى عوامل).

١-٣ تجد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة التربيعية د: س ← أس^{٢} + ب س + جـ ذات الجذر (الجذور) الحقيقية وبأستخدام التماثل.

١-٤ تستخدم القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لـ د(س) لرسم المنحنى.

١-٥ تجد مجموعة الحلول لمتباينات تربيعية.

١-٦ تستخدم المميز لتحديد عدد حلول د(س) = ٠ حيث د(س) دالة تربيعية.

١-٧ تحدّد عدد الحلول لزوج من المعادلات الآنيّة التي تتضمّن معادلة تربيعية ومعادلة خطّية.

١-٨ تحدّد ما إذا كان خط مستقيم ومنحنى تربيعي يلتقيان عند نقطة أو نقطتين أو لا يتقاطعان.

١-٩ تطبّق وتفسّر المعادلات والمتباينات والدوال التربيعية كتمثيلات رياضية في مواقف من الحياة اليومية. مثل المواقف

الأهداف التعليمية: تدل على المفاهيم المهمة في كل وحدة وتساعدك في تصفح الكتاب بطريقة منهجية.

نتيجة ١

تكتب المتباينات التربيعية في صورة أس^{٢} + ب س + جـ □ ٠، حيث أ ≠ ٠، يمكن استخدام الرموز ≤، ≥، <، > في المربع.

نتيجة: مربعات تحتوي على ملخص لأهم الطرائق والحقائق والصيغ.

منحنى الدالة التربيعية

المفردات الأساسية: هي مصطلحات مهمة في الموضوع الذي تتعلمه. تم تمييزها باللون البرتقالي الغامق. يتضمّن المحتوى تعريفات واضحة لهذه المصطلحات الأساسية.

استكشف ١

٢س^{٢} + ٣س − ٥ = (س − ١)(س − ٢)

المعروض أدناه هو حلّ مُنى للمعادلة السابقة:

حلّلت الطرف الأيمن إلى عوامل: (س − ١)(٢س + ٥) = (س − ١)(س − ٢)

٢س^{٢} + ٣س − ٥ = س^{٢} − ٣س + ٢

٢س^{٢} − ٣ = ٠

أعادت ترتيب الحدود: س = −٧

استكشف: تحتوي على أنشطة دعم إضافية. تعزز هذه الأنشطة العمل الجماعي ومناقشة الأقران، كما تهدف إلى تعميق فهمك للمفهوم (يتم توفير إجابات أسئلة الاستكشاف في كتاب دليل المعلم).

معرفة قبلية

المصدر	تعلّمت سابقًا أن	اختبر مهاراتك
الصف التاسع الوحدة الحادية عشرة	تحلّ معادلات تربيعية بالتحليل إلى العوامل.	١) حلّ: أ) س^{٢} + س − ١٢ = ٠ ب) س^{٢} − ٦س + ٩ = ٠ جـ) ٣س^{٢} − ١٧س − ٦ = ٠
الصف التاسع الوحدة السادسة	تحلّ متباينات خطّية.	٢) حلّ: أ) ٥س − ٨ < ٢ ب) ٣ − ٢س ≥ ٧
الصف العاشر الوحدة التاسعة	تحلّ معادلتَين آنيتَين إحداهما خطّية والأخرى تربيعية.	٣) حلّ: ص = س^{٢} − ٩س + ٣٠ ص = ٣س − ٦

المفردات

حلّل إلى العوامل Expand

منحنى الدالة التربيعية Quadratic curve

نقطة القيمة الصغرى minimum point

نقطة القيمة العظمى maximum point

معرفة قبلية: تمارين حول مواضيع تعلمتها سابقًا وتحتاج إليها قبل البدء بدراسة هذه الوحدة. حاول حل التمارين لتحدد المساحات التي تحتاج إلى مراجعتها قبل تكملة الوحدة.

المفردات: هي مصطلحات مهمة ستتعلّمها داخل الوحدة.

مثال ١

حلّ المعادلة س^{٢} = ٣س + ٢٨

الحل:

س^{٢} = ٣س + ٢٨	اكتب المعادلة في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠
س^{٢} − ٣س − ٢٨ = ٠	حلّل إلى العوامل.
(س − ٧)(س + ٤) = ٠	استخدم الحقيقة إذا كان ناتج الضرب ل ك = ٠، فإن ل = ٠ أو ك = ٠
س − ٧ = ٠ أو س + ٤ = ٠	حلّ.

أمثلة: تؤمّن منهجية الأمثلة الإجابة عن الأسئلة خطوة خطوة. ويُظهر الجانب الأيمن حلًّا تم تنفيذه بالكامل، بينما يحتوي الجانب الأيسر على تعليقات تشرح كل خطوة معتمدة في الحل.

مُساعَدة

عند التعامل مع المقادير النسبية، يجب أن يذكر أن المقام لا يمكن أن يكون صفرًا إذًا هنا س ≠ ٠ وس ≠ ٣−

مساعدة: مربعات تتضمن نصائح وإرشادات مفيدة حول الحسابات أو التحقّق من الإجابات.

هل تعلم؟

مفهوم تمثيل عدة مقاييس مختلفة بقيمة واحدة ممثلة هو اختراع حديث. فقبل القرن السابع عشر لا نجد مثالاً على استخدام الوسط الحسابي أو الوسيط أو المنوال.
وفي محاولة لإيجاد خط طول غانزا في أفغانستان، وفي دراسة عن خصائص المعادن، يعتبر البيروني Al-Biruni الذي عاش في القرن الحادي عشر، أحد أقدم المستخدمين لطريقة إيجاد مقياس ممثل للبيانات. فقد استخدم الأعداد

هل تعلم؟ مربعات تحتوي على حقائق مثيرة للاهتمام تظهر كيف ترتبط الرياضيات بالعالم الأوسع.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

رسم الدوال التربيعية

لرسم المنحنى التربيعي، نحدّد الأجزاء المقطوعة من المحورَين وإحداثيات نقطة التحوّل.

- لإيجاد الجزء المقطوع من المحور السيني، اجعل ص = ٠ وحلّ المعادلة الناتجة باستخدام التحليل إلى العوامل.
- لإيجاد الجزء المقطوع من المحور الصادي، اجعل س = ٠ واحسب ص.
- أوجد إحداثيات نقطة التحوّل عبر تحديد معادلة محور التماثل باستخدام الجزء المقطوع من المحور السيني، ثم تحديد نوع المنحنى للأعلى أم للأسفل باستخدام معامل $س^{٢}$

عند نهاية كل وحدة، توجد **قائمة تحقق من التعلم والفهم** التي تحتوي على ملخص للمفاهيم التي تمّ تناولها في الوحدة. يمكنك استخدامها للتحقق بسرعة من أنك اكتسبت الموضوعات الرئيسية.

يوجد في كل وحدة تمارين متعددة تحتوي على أسئلة تدريبية. تم تشفير هذه الأسئلة كالآتي:

- ★ تركز هذه الأسئلة على حل المسائل.
- ★ تركز هذه الأسئلة على البراهين.
- ★ تركز هذه الأسئلة على التمثيل.
- يجب ألّا تستخدم الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- يمكنك استخدام الآلة الحاسبة عند حل هذه الأسئلة.
- ★ هذه الأسئلة مأخوذة من اختبارات سابقة.

تمارين مراجعة نهاية الوحدة

تحتوي مراجعة نهاية الوحدة على أسئلة تحاكي الاختبار تغطي جميع الموضوعات في الوحدة. يمكنك استخدام هذه الأسئلة للتحقق من فهمك للموضوعات التي درستها.

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الأولى

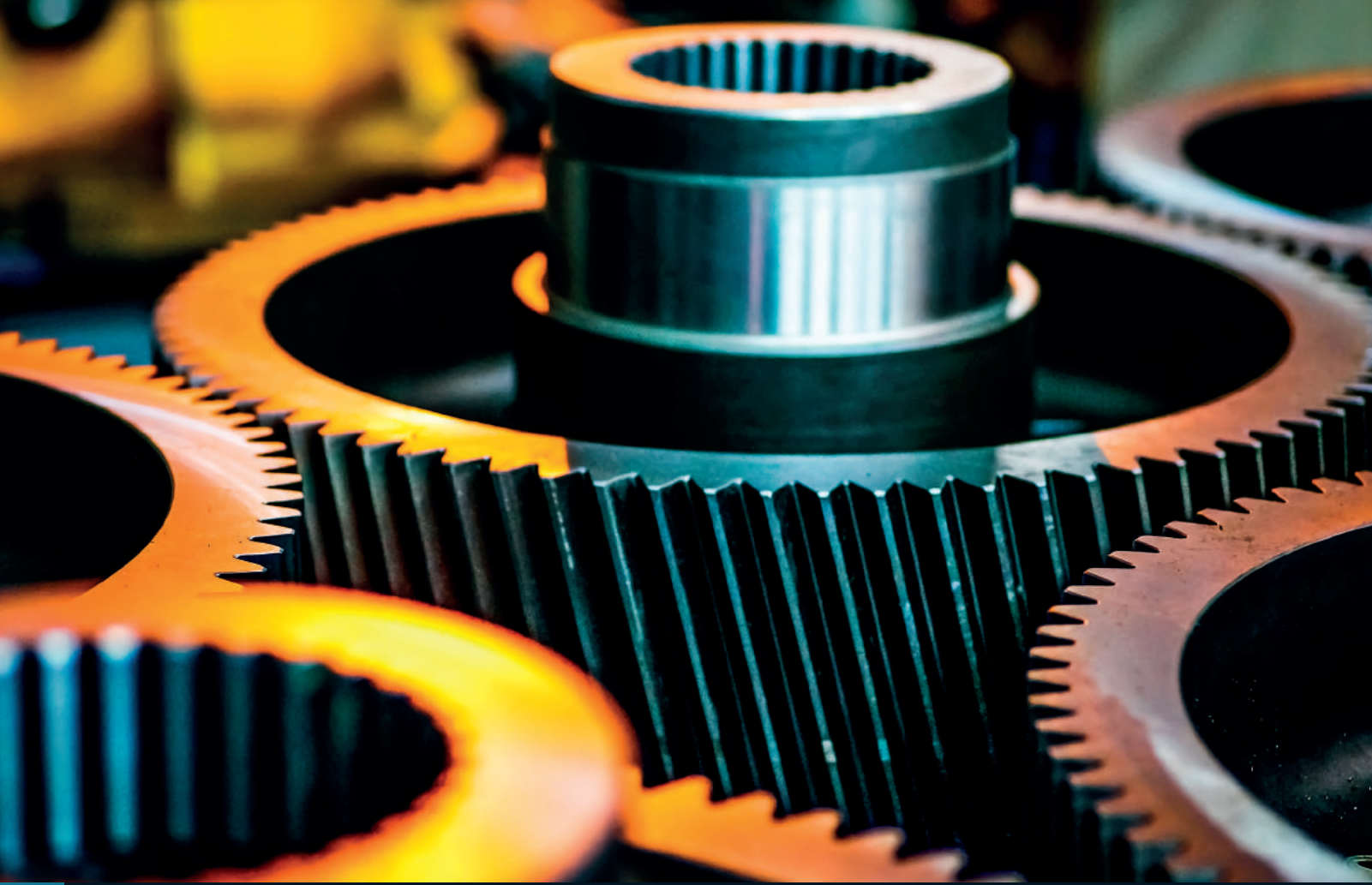
١) أوجِد مجموعة قيم ك التي لا يتقاطع عندها ص = ك(٤س − ٣) مع المنحنى ص = ٤$س^{٢}$ + ٨س − ٨

٢) أوجِد مجموعة قيم س حيث س(س + ٢) > س

٣) أوجِد مجموعة قيم ك حيث يقع المنحنى ص = (ك + ١)$س^{٢}$ − ٣س + (ك + ١) تحت المحور السيني.

٤) أوجِد مجموعة قيم س حيث $س^{٢}$ > ٦ − ٥س

٥) أوجِد قيم ك حيث يكون المستقيم ص = ك − ٦س مماسًا للمنحنى ص = س(٢س + ك).



الوحدة الثانية
الدوال Functions

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٢-١ تفهم المصطلحات: الدالة، المجال، المدى، الدالة واحد إلى واحد، واحد إلى متعدّد، متعدّد إلى واحد، الدالة العكسية، تركيب دالتين.

٢-٢ تستخدم الصيغ د(س) = أس^{٢} + ب س + جـ، د : س ← أس^{٢}، د$^{-١}$(س) و (هـ ○ س) (س) = هـ (د(س)).

٢-٣ تحدّد مدى دالة معطاة في حالات بسيطة حيث مجالها محدّدٌ مثل الدوال الخطية والتربيعية والدوال التبادلية البسيطة (التي يكون فيها البسط والمقام دوال خطية).

٢-٤ تشكّل الدوال المركّبة (باستخدام الدوال الخطّية والتربيعية والدوال الجذرية مثل د(س) = الجذر التربيعي (أس + جـ) والدوال النسبية).

٢-٥ تتذكّر وتستخدم تفسير وجود الدالة العكسية د$^{-١}$(س) في حالة أنّ الدالة د(س) هي دالة واحد إلى واحد.

٢-٦ تجد الدالة العكسية للدالة واحد إلى واحد (الدوال الخطّية والتربيعية والدوال الجذرية مثل د(س) = الجذر التربيعي (أس + جـ) والدوال النسبية).

٢-٧ تستخدم التمثيلات البيانية لتبين العلاقة بين الدالة ودالتها العكسية.

٢-٨ تطبّق وتفسر الدوال (باستخدام كثيرات الحدود الخطّية والتربيعية، الدوال الجذرية والدوال النسبية) كتمثيلات رياضية في مواقف من الحياة اليومية، مثل التمويل والطقس والأسواق العالمية والتصنيع.

معرفة قبلية

المصدر	تعلمت سابقًا	اختبر مهاراتك
الصف العاشر الوحدة الثامنة	أن توجِد مخرجات دالة معطاة.	١) إذا علمت أن د(س) = ٣س – ٢، فأوجد د(٤).
الصف العاشر الوحدة الثامنة	أن توجِد دالة مركَبة.	٢) إذا علمت أن د(س) = ٢س + ١، هـ(س) = ١ – س، فأوجد (د ○ هـ)(س).
الصف العاشر الوحدة الثامنة	أن توجِد الدالة العكسية لدالة بسيطة.	٣) إذا كانت د(س) = ٥س + ٤ فأوجد د$^{-١}$(س).

لماذا ندرس الدوال؟

سبق أن تعلّمت في الوحدة الثامنة من الصف العاشر كيفية تفسير العبارات الجبرية في صورة دوال لها مدخلات ومخرجات، وكيفية إيجاد تركيب الدوال البسيطة والدوال العكسية البسيطة.

يوجد الكثير من المواقف اليومية التي يمكن تمثيلها في صورة دوال، مثل:

- العلاقة بين درجة حرارة مشروب ساخن، وتبريده مع مرور الزمن.
- العلاقة بين ارتفاع الماء في البركة والزمن المستغرق منذ تشغيل الصنبور لملء البركة.
- علاقة الربح بعدد القطع المبيعة.

يساعدنا تمثيل هذه المواقف باستخدام الدوال المناسبة على القيام بتوقعات تتعلّق بمواقف من الحياة اليومية، على سبيل المثال: ما عدد القطع المبيعة ليتجاوز الربح مئة ألف ريال عُماني؟

يتطلب تمثيل المواقف الحياتية باستخدام الدوال:

١- تحديد ما يمثّله كل متغيّر، مثل س = عدد السلع المنتجة.

٢- تحديد ما تمثّله الدالة، مثل د(س) = الربح عند إنتاج س سلعة.

٣- استخدام الدالة وتفسيرها، مثل د(٣) = تكلفة إنتاج ٣ سلع.

في هذه الوَحدة، سوف نبني فهمًا مُعمّقًا للدوال وخواصها.

المفردات

العلاقة relation

المجال domain

المجال المقابل codomain

المدى range

الدالة function

واحد إلى واحد one-one

متعدّد إلى واحد many-one

متعدّد إلى متعدّد many-many

مجال الدالة domain

مدى الدالة range

اختبار المستقيم الرأسي vertical line test

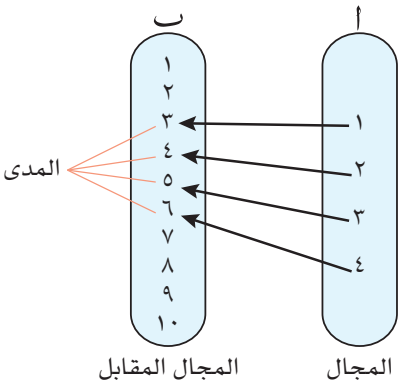
اختبار المستقيم الأفقي horizontal line test

الدالة المركّبة composite function

الدالة العكسية inverse function

الدالة العكسية لنفسها self-inverse function

٢-١ تعريف الدوال ومجالها ومداها



يوضح الرسم المجاور ارتباطًا بين عناصر المجموعة 'أ' بعناصر من المجموعة 'ب'، يمكن أن نطلق على هذا الارتباط مسمى علاقة.

العلاقة relation هي ارتباط بين عناصر مجموعة ما بعناصر مجموعة أخرى.

يطلق على المجموعة 'أ' **المجال domain**، كما يطلق على المجموعة الثانية 'ب' **المجال المقابل codomain**، أما العناصر (القيم) الموجودة في المجال المقابل والتي ارتبطت بعناصر من المجال فيطلق عليها **المدى range**.

الدالة function هي علاقة بين مجموعتين حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.

قد تكون الدالة **واحد إلى واحد one-one** أو **متعدّد إلى واحد many-one**.

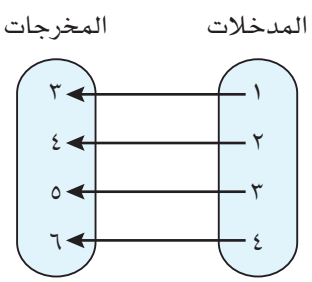
تُعدّ الدالة س ← س + ٢ حيث س ∈ ع مثالًا للدالة واحد إلى واحد.

س ∈ ع هو مجال للدالة.

مُساعَدة

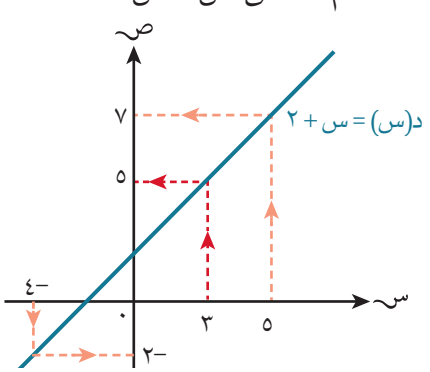
س ∈ ع تعني أن س تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية.

يمثل مخطّط العلاقة الآتية بعض قيم المدخلات (المجال) والمخرجات (المدى) للعلاقة س ← س + ٢ ونقرأ: العلاقة حيث يرتبط س بـ س + ٢:



العلاقة واحد إلى واحد

عند تمثيل العلاقة بيانيًّا باستخدام منحنى ص = س + ٢



يتضح من التمثيل البياني، أن كل نقطة في المجال مرتبطة بنقطة واحدة فقط في المجال المقابل. كما أن كل نقطة في المجال المقابل مرتبطة بنقطة واحدة فقط في المجال.

في هذه العلاقة (واحد إلى واحد)، ينتج من المدخلة ٤- مخرج واحد فقط وهو ٢-، أو ٤- مرتبطة بـ ٢-؛ وبصورة مماثلة المدخلة ٣ مرتبطة بمخرج واحد فقط وهو ٥ والمدخلة ٥ مرتبطة بمخرج واحد فقط وهو ٧

نتيجة ١

العلاقة واحد إلى واحد هي دالة.

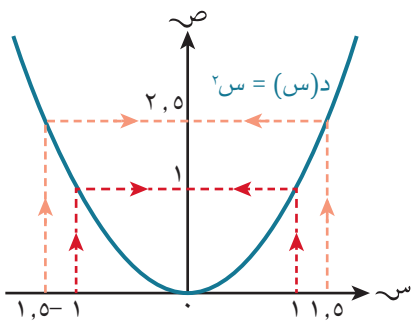
يمكن أن نكتب هذه الدالة في صورة د: س ← س + ٢ حيث س ∈ ع أو في صورة
د(س) = س + ٢، حيث س ∈ ع

تقرأ الدالة د: س ← س + ٢: حيث 'تربط الدالة س بـ س + ٢' أو س مرتبطة بـ س + ٢

الدوال الخطية هي أمثلة عن الدوال واحد إلى واحد.

العلاقة متعدّد إلى واحد

العلاقة س ← س^{٢} حيث س ∈ ع هي علاقة متعدّد إلى واحد:



من التمثيل البياني تلاحظ على منحنى الدالة د (س) أن كل نقطة في المجال (س) مرتبطة بنقطة واحدة فقط في المجال المقابل. ولكن كل نقطة في المجال المقابل مرتبطة بأكثر من نقطة في المجال.

هذه العلاقة تسمّى 'متعدّد إلى واحد'، حيث ينتج من المدخلة ١ أو المدخلة -١ المخرجة ١ نفسها، وبصورة مماثلة المدخلتان ١,٥ أو -١,٥ مرتبطتان بالمخرجة ٢,٢٥ نفسها.

نتيجة ٢

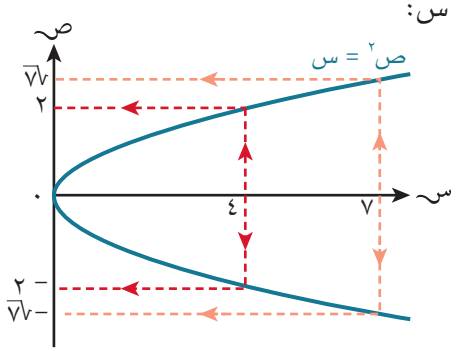
العلاقة متعدّد الى واحد هي دالة.

يمكننا أن نكتب هذه الدالة في صورة د: س ← س^{٢} حيث س ∈ ع أو د(س) = س^{٢} حيث تُقرأ د: س ← س^{٢} كالتالي 'الدالة د حيث يرتبط س بـ س^{٢}' أو 'الدالة د تربط س بـ س^{٢}'.

تعد الدوال التربيعية أمثلة على الدوال متعدّد إلى واحد.

العلاقة واحد إلى متعدّد

إذا أخذنا المنحنى ص^{٢} = س:



نلاحظ في التمثيل البياني أن بعض النقاط في المجال مرتبطة بأكثر من نقطة واحدة في المجال المقابل.

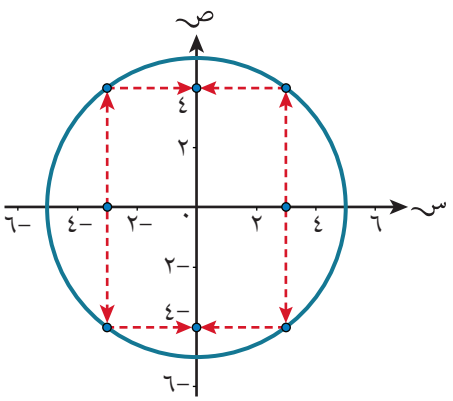
في هذه العلاقة واحد إلى متعدّد، للقيمة المدخلة ٤ قيمتان مخرجتان ٢ و −٢ وبالمثل للقيمة المدخلة ٧ قيمتان مخرجتان هما $\sqrt{٧}$ و $-\sqrt{٧}$.

نتيجة ٣

علاقة واحد إلى متعدد ليست بدالة.

العلاقة متعدّد إلى متعدّد

إذا لاحظنا منحنى $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$



بعض النقاط في المجال مرتبطة بأكثر من نقطة واحدة في المجال المقابل. وأن بعض النقاط في المجال المقابل مرتبطة بأكثر من نقطة واحدة من المجال.

لدينا دائرة، حيث من الممكن أن يكون لقيمة مدخلة ما مخرجتان محتملتان، مثل المدخلة ٣ لديها مخرجتان ٤ و −٤. كما لقيمة بعض المخرجات قيمتان مدخلتان مختلفتان، وللقيمة المخرجة −٤ قيمتان مدخلتان هما ٣ و −٣. هذه علاقة متعدّد إلى متعدّد.

نتيجة ٤

علاقة متعدّد إلى متعدّد ليست بدالة.

نتيجة ٥

تُسمّى مجموعة قيم المدخلات في الدالة مجال الدالة.

عند تعريف الدالة، من المهمّ أن نحدّد مجالها.

تُسمّى مجموعة قيم المخرجات في الدالة المدى للدالة.

١) علاقة واحد إلى واحد هي دالة.

٢) علاقة متعدّد إلى واحد هي دالة.

٣) علاقة واحد إلى متعدّد ليست دالة.

٤) علاقة متعدّد إلى متعدّد ليست دالة.

اختبارات المستقيم الرأسي والأفقي

يستخدم **اختبار المستقيم الرأسي** **vertical line test** لتحديد عدد قيم ص الممكنة لكل قيمة س، وبالتالي يمكن التحقق مما إذا كان التمثيل البياني للعلاقة يمثل دالة أم لا.

العلاقة تمثل دالة إذا تعذّر رسم مستقيم رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

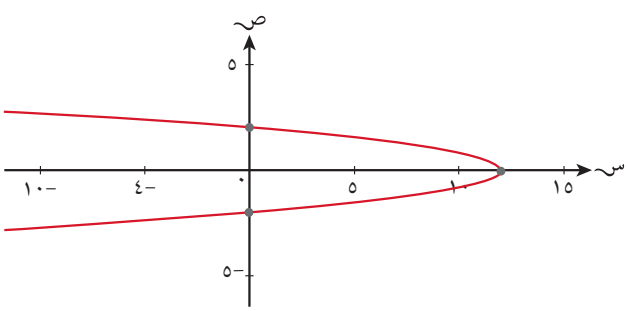
يستخدم **اختبار المستقيم الأفقي** **horizontal line test** لتحديد عدد قيم س الممكنة لكل قيمة ص.

باستخدام الاختبارين الرأسي والأفقي يمكننا تحديد ما إذا كانت العلاقة واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد أو واحد إلى متعدّد أو متعدّد إلى متعدّد.

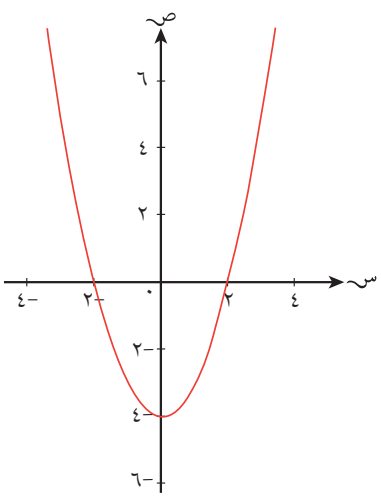
مثـال ١

استخدم اختبارات المستقيمات الرأسية والأفقية لتحدد نوع العلاقة ونوع الدالة إن وجدت:

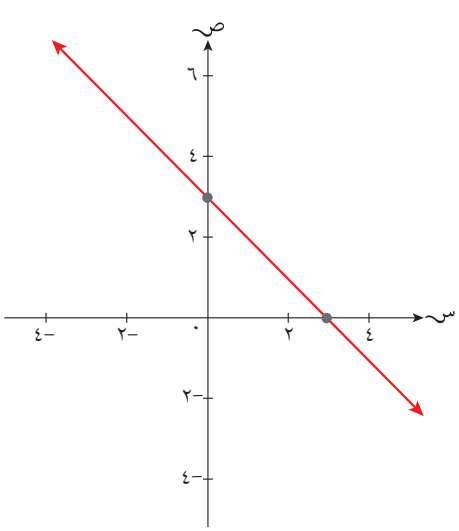
أ $٣ص^{٢} + س = ١٢$



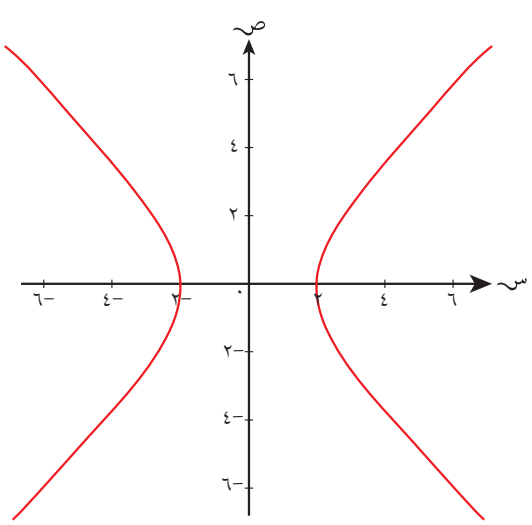
ب $ص = س^{٢} - ٤$



ج $س + ص = ٣$

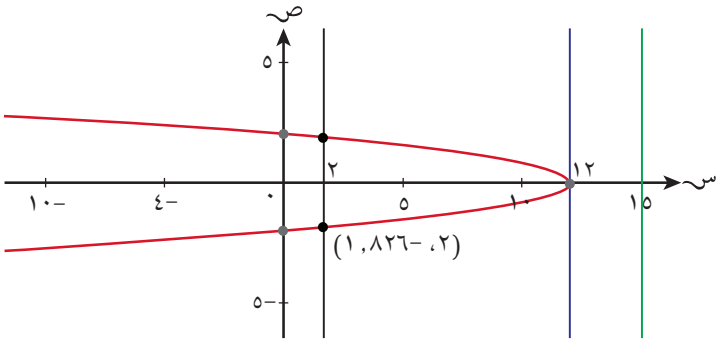


د $س^{٢} - ص^{٢} = ٤$



الحــلّ:

أ



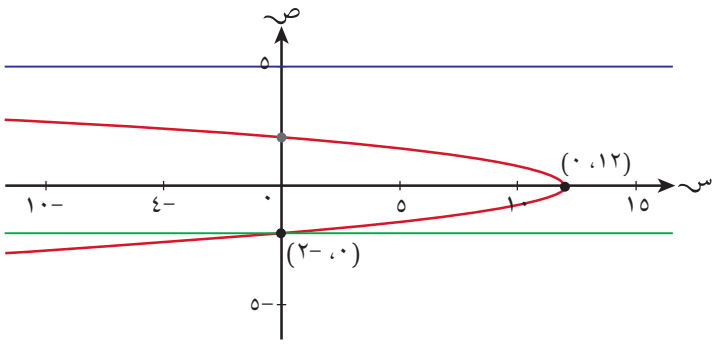
استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحدّد العدد الممكن لقيم ص لكل قيمة لـ س

س = ١٥ ليست في مجال الدالة، فالمستقيم الرأسي المرسوم من خلال س = ١٥ لا يتقاطع مع التمثيل البياني (هذا مستقيم رأسيّ ليس جيدًا للاختبار لأن س = ١٥ ليست في المجال).

س = ١٢ مرتبطة بقيمة واحدة من ص، وهي تتقاطع مع التمثيل البياني عند النقطة (١٢، ٠).

س = ٢ مرتبطة بقيمتين لـ ص، فهي تتقاطع مع التمثيل البياني بالنقطتَين (٢، ١,٨٢٦)، (٢، -١,٨٢٦) وهذا يعني أن هذه العلاقة ليست دالة لأنه يوجد قيم لـ س مرتبطة بأكثر من قيمة لـ ص

العلاقة ليست دالة.



استخدم اختبار المستقيم الأفقي لتحدّد العدد الموجود الممكن لقيم س لكل قيمة لـ ص

لكل قيمة لـ ص قيمة واحدة فقط لـ س

وعندما ص = -٢ مرتبطة بقيمة واحدة من س، عندئذٍ يتقاطع مع التمثيل البياني عند النقطة (٠، -٢).

ص = ٠ مرتبط بقيمة واحدة من س، إذ يتقاطع مع التمثيل البياني عند النقطة (٠، ١٢)

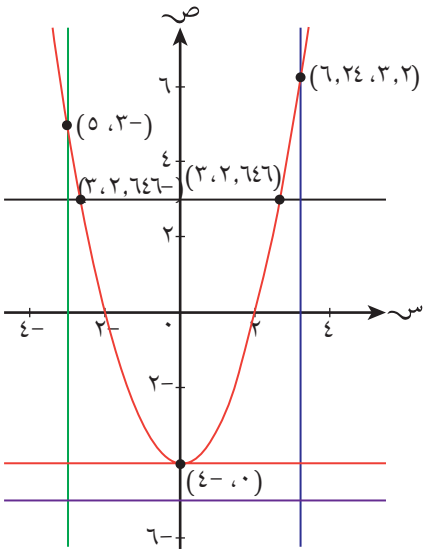
ص = ٢ مرتبطة بقيمة واحدة لـ س، إذ يتقاطع مع التمثيل البياني عند (٠، ٢).

ص = ٥ مستقيم ليس مناسبًا للاختبار.

وعليه، كل قيمة لـ ص ارتبطت بقيمة واحدة لـ س

من اختبار المستقيمَين الرأسي والأفقي نجد أن العلاقة واحد إلى متعدّد.

ب

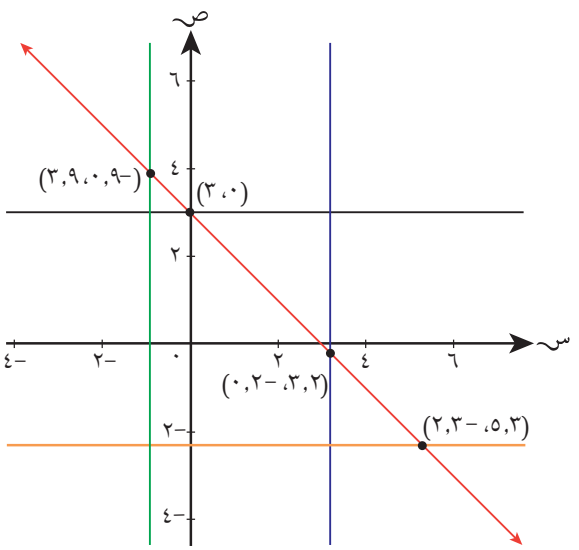


باستخدام اختبار المستقيم الرأسي نجد أنه يقطع المنحنى في نقطة واحدة على الأكثر.

∴ المعادلة تمثل دالة باستخدام اختبار المستقيم الرأسي واختبار المستقيم الأفقي، يمكن أن نلاحظ أنه من الممكن أن ترتبط كل قيمة لـ ص بأكثر من قيمة واحدة لـ س، ولكن كل قيمة لـ س ترتبط فقط بقيمة واحدة لـ ص

∴ العلاقة متعدّد إلى واحد، فهي تمثل دالة.

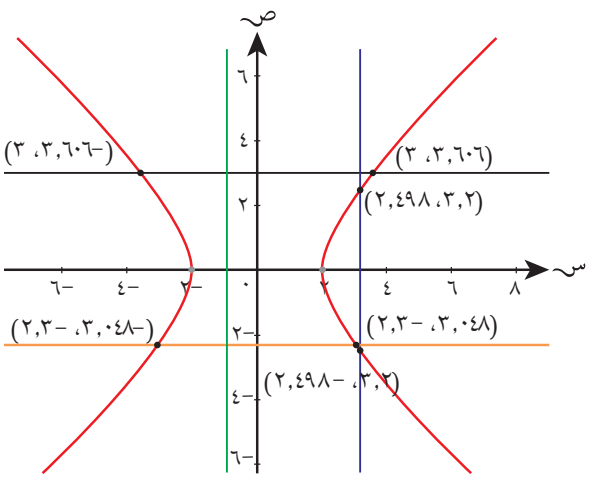
ج



باستخدام اختبار المستقيم الرأسي واختبار المستقيم الأفقي، نلاحظ أن المستقيم الأفقي أو المستقيم الرأسي يتقاطع مع المنحنى س + ص = ٣ مرة واحدة فقط، أي أنه توجد قيمة واحدة فقط لـ س لكل قيمة لـ ص وقيمة واحدة لـ ص لكل قيمة لـ س

∴ العلاقة واحد إلى واحد، فهي تمثل دالة.

د

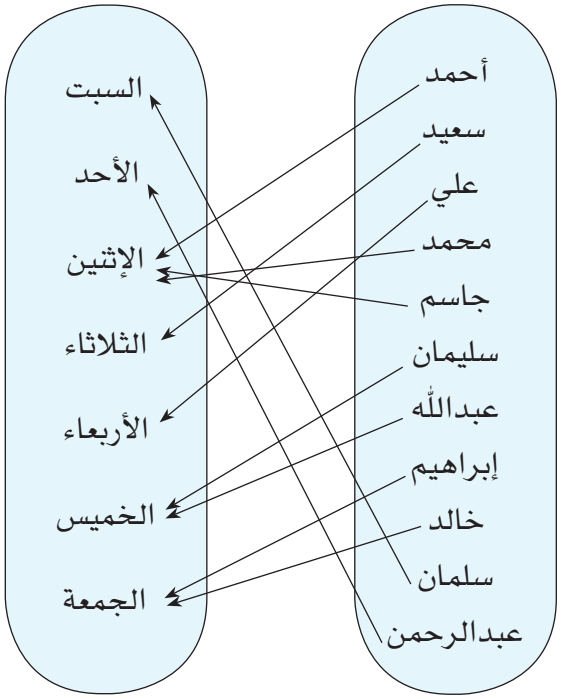


باستخدام اختبار المستقيم الرأسي واختبار المستقيم الأفقي، يمكن أن نلاحظ أن بعض قيم س ترتبط بأكثر من قيمة واحدة لـ ص. ومن جهة ثانية من الممكن أن ترتبط كل قيمة لـ ص بقيمتَين لـ س

∴ العلاقة متعدّد إلى متعدّد، فهي لا تمثّل دالة.

مثـــال ٢

تبيّن العلاقة، أدناه، عددًا من طلبة أحد الصفوف، واليوم الذي ولد فيه كل طالب.



إذا علمت أن العلاقة تمثل دالة:

أ أوجِد مجال الدالة ومداها.

ب ما نوع هذه الدالة؟

الحـــلّ:

أ مجال الدالة هو أسماء الطلبة.

المدى للدالة هو أيام ميلاد الطلبة.

بالنظر إلى المخطط، مجال الدالة هو مجموعة العناصر التي بدأت بها، ومداها هو مجموعة العناصر المرتبطة بها.

ب تربط الدالة أكثر من طالب بيوم محدد، لذا فإن الدالة متعدّد إلى واحد

بما أنه من الممكن أن يكون طالبان أو أكثر قد ولدوا في اليوم نفسه، فهناك العديد من العناصر المرتبطة بعنصر واحد.

مثـــال ٣

إذا كانت د(س) = ٥ − ٢س حيث س ∈ ع، −٤ ≤ س ≤ ٥

أ اكتب مجال الدالة.

ب أوجد المدى للمجال المحدّد.

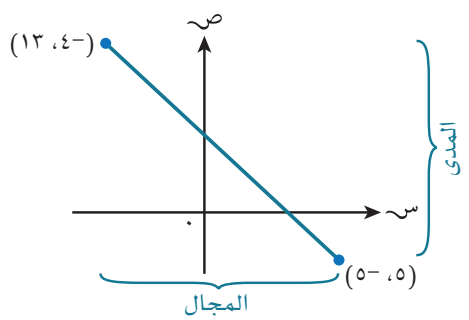
الحـــلّ:

أ المجال هو −٤ ≤ س ≤ ٥

ب منحنى ص = ٥ − ٢س هو مستقيم ..... أوجد نقطتين لرسم المستقيم، في هذه الحالة نقطتا النهاية عندما س = −٤، س = ٥

عندما س = −٤، ص = ٥ − ٢(−٤) = ١٣ (القيمة العظمى)

عندما س = ٥، ص = ٥ − ٢(٥) = −٥ (القيمة الصغرى)



المدى هو −٥ ≤ د(س) ≤ ١٣

مثـــال ٤

إذا كانت الدالة د(س) = س^{٢} − ٦س + ٨ حيث −١ ≤ س ≤ ٦

فأوجد مدى الدالة في المجال المحدد.

الحـــلّ:

عليك الأخذ في الاعتبار أن مدى الدالة في المجال −١ ≤ س ≤ ٦

عندما س = −١، فإن د(−١) = (−١)^{٢} − ٦ × (−١) + ٨ = ١٥

عندما س = ٦، فإن د(٦) = ٦^{٢} − ٦ × ٦ + ٨ = ٨

ولكن الدالة د(س) = س^{٢} − ٦س + ٨ ليست خطية، ..... في الوحدة ١، تعلمنا عن هذا الشكل ونعلم أيضًا أن هذا المنحنى له قيمة صغرى.

إنها منحنى دالّة تربيعية. ..... لإيجاد القيمة الصغرى، اجعل د(س) = ٠ أولًا.

س^{٢} − ٦س + ٨ = ٠ ..... حلّل إلى العوامل لتحل.

(س − ٤)(س − ٢) = ٠

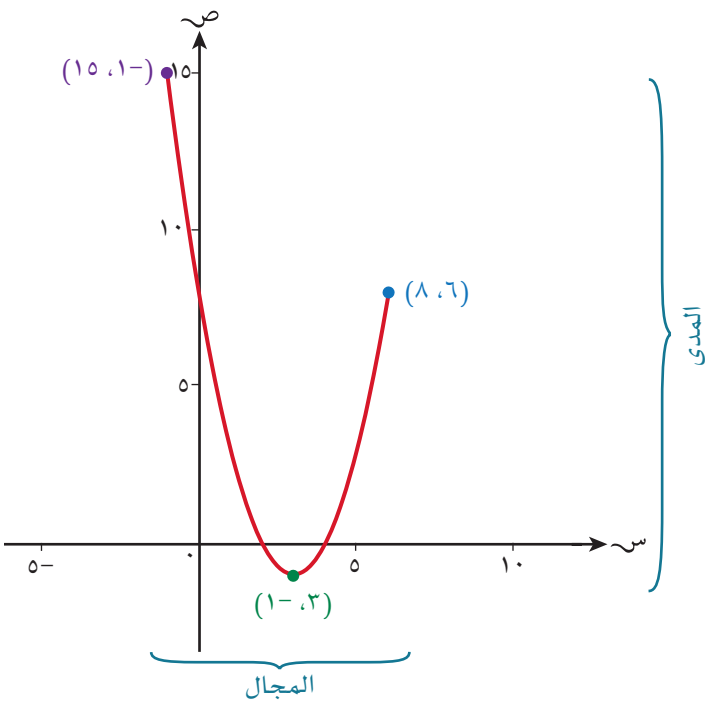
س = ٤ أو س = ٢

منتصف المسافة بين س = ٢، س = ٤ هي س = ٣ ..... قيمة س التي تقع في منتصف المسافة بين الجذرَين، أي محور التماثل.

عندما س = ٣، د(٣) = $٣^{٢}$ − ٦ × ٣ + ٨ = −١ ..... القيمة الصغرى.

وعليه، القيمة الصغرى لـ د(س) = −١

يمكنك الآن رسم منحنى الدالة التربيعية.



القيمة العظمى لـ د(س) = ١٥

وعليه، فإن المدى −١ ≤ د(س) ≤ ١٥

مثـــال ٥

وقّعت شركة ما على رسوم صيانة شهرية مع أحدى الشركات المتخصصة برسوم ثابتة شهريًّا مقدارها ٢٥٠٠ ريال عماني يضاف إليها رسوم تصليح الأعطال الكبيرة قدرها ٥٠٠ ريال عن كل عطل.

يتم احتساب فاتورة الشركة من خلال الدالة:

$$ك(م) = ٢٥٠٠ + ٥٠٠ م$$

إذا كانت الشركة تتعرض شهريًّا إلى ما بين اثنين إلى ثمانية أعطال كبيرة، فأوجد:

أ مجال الدالة ك(م).

ب ما مدى الدالة؟

ج ماذا يمثّل المدى في سياق المسألة؟

الحـــلّ:

أ $٢ \leqslant م \leqslant ٨$

مجال الدالة هو عدد الآلات التي تعمل في اليوم.
تشغّل الشركة يوميًّا ما بين آلتَين و٨ آلات.

ب $ك(م) = ٢٥٠٠ + ٥٠٠ م$

هي دالّة خطيّة. تتحقق القيمة الصغرى عندما $م = ٢$

$ك(٢) = ٢٥٠٠ + ٥٠٠ \times ٢ = ٣٥٠٠$

وتتحقق القيمة العظمى عندما $م = ٨$

$ك(٨) = ٢٥٠٠ + ٥٠٠ \times ٨ = ٦٥٠٠$

المدى هو $٣٥٠٠ \leqslant ك(م) \leqslant ٦٥٠٠$

ج يمثل المدى قيمة فاتورة الكهرباء التي تتراوح بين ٣٥٠٠ و٦٥٠٠ ريال عُماني.

تمارين ٢-١

١) أيّة معادلة من المعادلات الآتية تمثّل دالة؟ حدّد ما إذا كانت واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد:

أ) ص = ٢س − ٣ ، س ∈ ع
ب) ص = س^{٢} − ٣ ، س ∈ ع
ج) ص = ٣س^{٢} + ٤ ، س ∈ ع، س ≤ ٠

٢) استخدم برمجيات الرسم لتحدّد أيّة معادلة من المعادلات الآتية تمثل دالة. اذكر ما إذا كانت الدالة واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد:

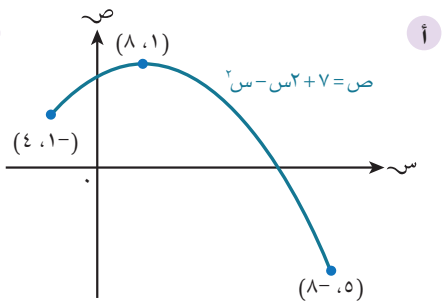
أ) ص = ٢س^{٣} − ١ ، س ∈ ع
ب) ص = ٢^{س} ، س ∈ ع
ج) ص = $\frac{١٠}{س}$ ، س ∈ ع، س > ٠
د) ص = $\sqrt{س}$ ، س ∈ ع، س ≤ ٠
هـ) ص^{٢} = ٤س ، س ∈ ع

٣) في كل موقف من المواقف الآتية، صف نوع الدالة التي تربط المجال بالمدى:

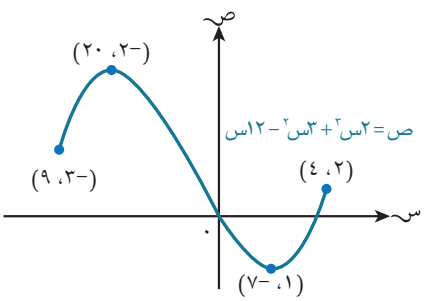
أ) المجال: المسافرون في المطار — المدى: وجهة السفر.
ب) المجال: المرضى في عيادة الطبيب — المدى: المواعيد لدى الطبيب.
ج) المجال: المسافرون في الطائرة — المدى: المقاعد داخل الطائرة.

٤) حدّد المجال والمدى لكل دالة من الدالتَين الممثّلتَين بالمُنحنيَين الآتيَين:

أ)



ب)



٥) حدّد مدى كلّ دالة من الدوال الآتية:

أ) د(س) = س + ٤ حيث س < ٨
ب) د(س) = ٢س − ٧ حيث −٣ ≤ س ≤ ٢
ج) د(س) = ٧ − ٢س حيث −١ ≤ س ≤ ٤
د) د: س ← ٢س^{٢} حيث ١ ≤ س ≤ ٤
هـ) د(س) = س^{٢} − ٢ حيث س ∈ ع

مُساعَدة

لتحديد مدى هذه الدوال ارسمها في مجالها المحدد.

٦) ارسم منحنى كل دالة تربيعية من الدوال الآتية، ثم حدّد مدى كل منها:

أ) ص = س^{٢} + ٤س − ١٢، حيث س ∈ ع

ب) ص = ١٦ − س^{٢}، حيث س ∈ ع، س ≤ −١

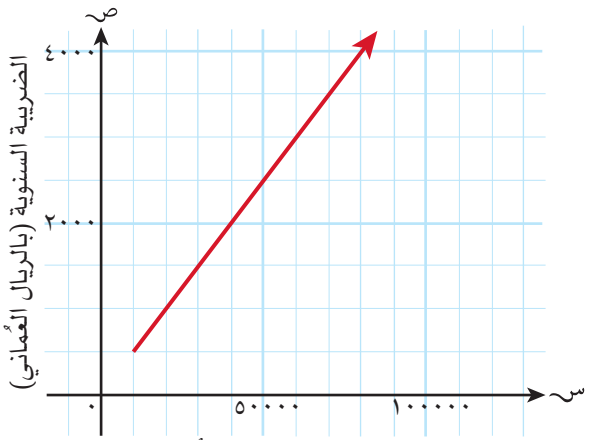
ج) ص = ٢س^{٢} + ٩س + ٧، حيث −٤ ≤ س < ٠

د) ص = ١٠ − ٣س − س^{٢}، حيث س ≤ ٠

٧) د(س) = س^{٢} − ٢س − ٣ حيث س ∈ ع، أ ≤ س ≤ ب

أوجد قيمة كل من أ، ب إذا كان مدى الدالة هو −٤ ≤ د(س) ≤ ٥

٨) يمثّل التمثيل البياني أدناه ما يدفعه أحمد كضريبة جديدة على الدخل.



أ) ما مجال الدالة ومداها؟

ب) فسّر المجال ضمن سياق المسألة.

٩) يعتمد إيجار سيارة الأجرة (ك) على رسم ثابت قيمته ٢ ريال عُماني إضافة إلى ٠,٢٨ ريال عُماني لكل كيلومتر تجتازه السيارة.

أ) اكتب دالة الكلفة ك لإيجار السيارة عندما تجتاز السيارة س كيلومترات.

ب) أوجِد مجال الدالة ك ومداها.

٢-٢ الدوال المركّبة

يمكن وصف معظم الدوال التي تطالعنا في صورة تركيب من دالتَين أو أكثر.

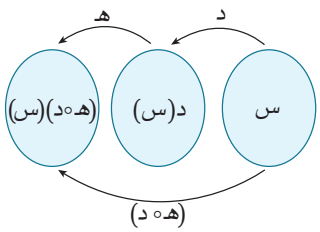
فمثلًا الدالة س ← ٣س – ٧ هي الدالة 'اضرب في ٣، ثم اطرح ٧'.

إنها تركيب من الدالتَين د، هـ حيث:

د: س ← ٣س (الدالة 'اضرب في ٣')

هـ: س ← س – ٧ (الدالة 'اطرح ٧')

وعليه، يمكن وصف س ← ٣س – ٧ في صورة دالة 'طبّق د أولًا، ثم طبّق هـ' على الناتج.



لو طبقنا ذلك بالترتيب المعاكس، أي لو نفذنا الدالة د، ثم الدالة هـ على الناتج، فسوف نحصل (في هذه الحالة) على ناتج مختلف، وهو ٣ ← ٣(س – ٧)

عندما تُتبع دالة بدالة أخرى، يُسمى الناتج **بالدالة المركّبة composite function**.

من المهم أن تنتبه إلى أنه في بعض الحالات من المستحيل تنفيذ كل الدوال على أيّة قيمة.

على سبيل المثال، لا يمكن إيجاد تركيب الدوال مع الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ عندما س = ٠،

إلّا أنه يمكن تركيب هذه الدالة مع دالة أخرى عندما يتم تحديد المجال، كما في هذه الحالة

س ∈ ع، حيث س ≠ ٠

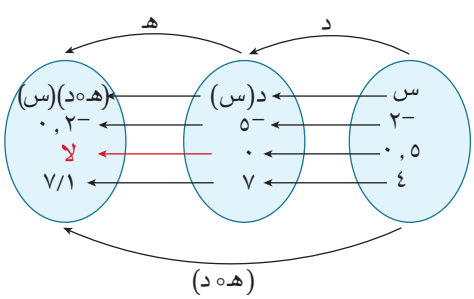
عند تركيب الدوال، يجب أن نتأكد من أن كل القيم الموجودة في مدى الدالة الأولى يمكن استخدامها في صورة مجال في الدالة الثانية.

على سبيل المثال، إذا كانت الدالة د(س) = ٢س – ١، س ∈ ع والدالة هـ(س) = $\frac{١}{س}$ عندما

س ∈ ع، حيث س ≠ ٠

لا يشكل تنفيذ الدالة هـ، ثم الدالة د أيّة مشكلة، لأن كل قيمة في مدى الدالة هـ موجودة في مجال الدالة د

بينما إذا تمّ تنفيذ الدالّتَين في الترتيب المعاكس، الدالة د ثم الدالة هـ، فستواجه مشكلة عندما س = ٠,٥، حيث إن د(٠,٥) = ٠ ولا يمكننا استخدام ذلك كجزء من مجال الدالة هـ



نتيجة ٦

(هـ ∘ د)(س) تعني تطبيق الدالة د على س أولًا، ثم تطبيق الدالة هـ على الناتج.

عند تركيب الدوال من المهم أن تتذكر الآتي:

نتيجة ٧

- تتحقق (هـ ∘ د) فقط إذا كان مدى الدالة د مجموعة جزئية من مجال الدالة هـ.
- بصورة عامة، (د ∘ هـ) (س) ≠ (هـ ∘ د) (س). إلّا في حالات خاصة وهي الدالة العكسية.

مثـــال ٦

إذا علمت أن د(س) = ٢س + ٣ حيث س ∈ ع ، هـ(س) = س^{٢} − ١ حيث س ∈ ع

فأوجد:

أ (د ∘ هـ)(س) ب (هـ ∘ د)(س) ج (د ∘ د)(س)

الحـــلّ:

أ (د ∘ هـ)(س) = د(هـ(س)) = د(س^{٢} − ١) — طبّق الدالة هـ بدل س في د(س)، حيث هـ (س) = س^{٢} − ١

= ٢(س^{٢} − ١) + ٣

= ٢س^{٢} + ١ — د هي الدالة 'اضرب في ٢، ثم زد ٣'

ب (هـ ∘ د)(س) = هـ(٢س + ٣) — طبّق الدالة د بدل س في هـ (س)، حيث د(س) = ٢س + ٣

= (٢س + ٣)^{٢} − ١

= ٤س^{٢} + ١٢س + ٩ − ١ — هـ هي الدالة 'رَبّع ثم اطرح ١'

= ٤س^{٢} + ١٢س + ٨

ج (د ∘ د)(س) = د(٢س + ٣) — طبّق الدالة د بدل س في د(س)، حيث د(س) = ٢س + ٣

= ٢(٢س + ٣) + ٣

= ٤س + ٩

استكشف ١

طُلب إلى ثلاثة طلبة أن يجدوا الدالة المركبة (هـ ∘ د)(س) حيث:

د(س) = ٢س − ٥ حيث س ∈ ع

هـ(س) = ٣س − ١ حيث س ∈ ع

إليك الحلول التي قدّموها:

الطالب (أ)	الطالب (ب)	الطالب (ج)
(هـ ∘ د)(س) = (٣س − ١)(٢س − ٥) = ٦س^{٢} − ١٧س + ٥	(هـ ∘ د)(س) = ٢(٣س − ١) − ٥ = ٦س − ٧	(هـ ∘ د)(س) = ٣(٢س − ٥) − ١ = ٦س − ١٦

ناقش الحلول مع أقرانك في الصف.

أيّ الطلبة قدّم الحلّ الصحيح؟ ما الخطأ الذي ارتكبه كل من الطالبَين الآخرَين؟

مثـال ٧

إذا علمت أن د(س) = (س − ٤)^{٢} − ١، حيث س ∈ ع ، هـ(س) = $\frac{٢س + ٣}{س - ٢}$، حيث س ∈ ع، س > ٢

فأوجد (د ∘ هـ)(٤).

الحـلّ:

هـ(٤) = $\frac{٢(٤) + ٣}{٤ - ٢}$ = $\frac{١١}{٢}$ ..... طبق ناتج الدالة هـ عندما س = ٤ في الدالة د

(د ∘ هـ)(٤) = د$\left(\frac{١١}{٢}\right)$ ..... عوّض عن $\frac{١١}{٢}$ في الدالة د، اطرح ٤، ربّع ثم اطرح ١

= $\left(٤ - \frac{١١}{٢}\right)^{٢}$ − ١

= ١$\frac{١}{٤}$

مثـــال ٨

إذا كانت د : س ← $\frac{٥}{س - ٤}$، حيث س ∋ ع، س ≠ ٤ وس ≠ $\frac{٢١}{٤}$ ، هـ(س) = ٣ − س^{٢}، حيث س ∋ ع

فأوجد : أ (د ○ هـ)(س). ب (د ○ د)(س).

الحـــلّ:

أ (د ○ هـ)(س) = د(٣ − س^{٢}) ..... طبّق الدالة هـ بدل س في الدالة د

$= \frac{٥}{(٣ - س^{٢}) - ٤}$ ..... د هي الدالة 'اطرح ٤، ثم أوجد ناتج قسمة الناتج على ٥'

$= \frac{٥}{-١ - س^{٢}}$

$= \frac{-٥}{س^{٢} + ١}$

ب (د ○ د)(س) = د($\frac{٥}{س - ٤}$) ..... طبّق الدالة د بدل س في الدالة د

$= \frac{٥}{\frac{٥}{س - ٤} - ٤}$ ..... اضرب البسط والمقام في (س − ٤).

$= \frac{٥(س - ٤)}{٥(س - ٤) - ٤(س - ٤)}$

$= \frac{٥(س - ٤)}{٥ - ٤(س - ٤)}$

$= \frac{٥س - ٢٠}{٢١ - ٤س}$

مثـــال ٩

تمثل التكلفة ك(ن) لإنتاج ن منتج بالدالة:

ك(ن) = ١,٨ + ٢ن

ولكل ل (ريالًا عُمانيًّا) يتم إنفاقه، تحسب الدالة الآتية الربح:

ع(ل) = ٠,٤ ل

أوجِد الربح من إنتاج ن منتج.

الحـــلّ:

ك(ن) = ١,٨ + ٢ن ..... سيتم دمج الدالّتَين باستخدام الدوال المركبة.

ع(ل) = ٠,٤ ل

(ع ○ ك)(ن) = ع(ك(ن)) ..... (ع ○ ك)(ن) تعني تنفيذ تعويض الدالة ك(ن) في الدالة ع(ل).

ع(ك(ن)) = ٠,٤(١,٨ + ٢ن)

(ع ○ ك)(ن) = ٠,٤(١,٨ + ٢ن)

(ع ○ ك)(ن) = ٠,٧٢ + ٠,٨ن ..... يمكنك كتابة ع(ك(ن)) في صورة (ع ○ ك)(ن).

∴ الربح من إنتاج ن منتج يساوي ٠,٧٢ + ٠,٨ن

تمارين ٢-٢

١) إذا علمت أن د : س ← ٢س + ٣، حيث س ∈ ع

هـ: س ← س^{٢} − ١، حيث س ∈ ع

أ أوجِد (د ○ هـ)(٢).

ب أوجِد (هـ ○ د)(٥).

٢) إذا كانت د(س) = (س + ٢)^{٢} − ١، حيث س ∈ ع

فأوجِد (د ○ د)(٣).

٣) إذا كانت د(س) = س^{٢} + ٦، حيث س ∈ ع

هـ(س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$ − ٢، حيث س ∈ ع، س ≤ −٣

فأوجد :

أ (د ○ هـ)(٦).

ب (هـ ○ د)(٤).

ج (د ○ د)(−٣).

٤) إذا كانت ع : س ← س + ٥ حيث س ∈ ع، س > ٠

ل : س ← $\sqrt{\text{س}}$ حيث س ∈ ع، س > ٠

فاكتب كل دالة من الدوال الآتية في صورة دالة مركبة، مستخدمًا الدالة ع أو الدالة ل أو كلتيهما :

أ س ← $\sqrt{\text{س}}$ + ٥

ب س ← $\sqrt{\text{س} + ٥}$

ج س ← س + ١٠

٥) إذا علمت أن د : س ← ٢س + ٣ حيث س ∈ ع، س ≠ −١

هـ : س ← $\frac{١٢}{١ - \text{س}}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ١

أ أوجد (هـ ○ د)(س) إن أمكن ذلك.

ب حلّ المعادلة (هـ ○ د)(س) = ٢

٦) إذا علمت أن هـ(س) = س^{٢} − ٢ حيث س ∈ ع

ل(س) = ٢س + ٥ حيث س ∈ ع

أ أوجد (هـ ∘ ل)(س) إن أمكن ذلك.

ب حلّ المعادلة (هـ ∘ ل)(س) = ١٤

٧) إذا كانت د : س ← س^{٢} حيث س ∈ ع

هـ : س ← س + ١ حيث س ∈ ع

فاكتب كلّ دالة من الدوال الآتية في صورة دالة مركبة، مستخدمًا الدالة د أو الدالة هـ أو كلتيهما:

أ س ← (س + ١)^{٢}

ب س ← س^{٢} + ١

ج س ← س + ٢

د س ← س^{٤}

٨) إذا علمت أن د(س) : س^{٢} − ٥س حيث س ∈ ع

هـ(س) = ٢س + ٣ حيث س ∈ ع

أ أوجد (د ∘ هـ)(س).

ب أوجد مدى الدالة (د ∘ هـ)(س).

٩) تمثّل الدالة أدناه دالة الكلفة ك(ن) لإنتاج ن قطعة من سلعة ما:

ك(ن) = ٢ + ٤ن

ولكل س ريال عُماني تمّ صرفه، يتمّ احتساب الربح باستخدام الدالة:

ر(س) = ٠,٢ س

أوجِد (ر ∘ ك)(ن).

١٠) تمثّل الدالة المعطاة الارتفاع فوق مستوى سطح البحر ع (بالأمتار) لمتسلق جبال حيث كان يتسلق لمدة ن ساعة:

ع(ن) = ٣٠ن + ٤٩٠

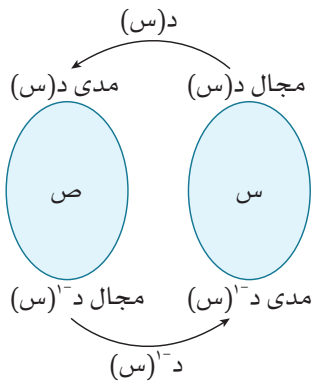
كما أن درجة الحرارة د (بالدرجة السيليزية) لكل س متر فوق سطح البحر تتمثّل بالدالة:

$$د(س) = ٢٠ - \frac{٢س}{٣٠٠}$$

أوجِد (د ∘ ع)(ن).

٢-٣ الدوال العكسية

إذا كانت الدالة د(س) واحد إلى واحد، ووجدت دالّة أخرى تعكس ما تقوم به الدالة د(س)، فإن هذه الدالة تسمّى **الدالة العكسية** **inverse function** للدالة د(س) وتكتب في صورة $د^{-١}(س)$.



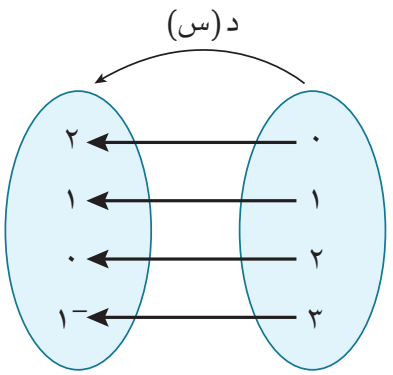
نتيجة ٨

مجال الدالة $د^{-١}$(س) هو مدى الدالة د(س).

مدى الدالة $د^{-١}$(س) هو مجال الدالة د(س).

على سبيل المثال:

الدالة الآتية د(س) واحد إلى واحد



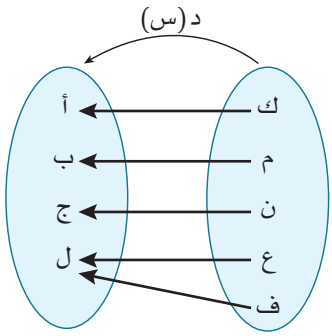
$د^{-١}(٠) = ٢$ وهكذا.

مجال الدالة $د^{-١}$(س) هو مدى الدالة د(س)، أي يساوي ٢، ١، ٠، −١

مدى الدالة $د^{-١}$(س) هو مجال الدالة د(س)، أي يساوي ٠، ١، ٢، ٣

من المهم أن تتذكر أنه لا توجد لكل الدوال دوال عكسية.

فمثلًا، لا توجد دالة عكسية للدالة الآتية لأن د$^{-1}$(ل) غير موجودة.



إذا كانت الدالة د(س) = ٥س − ٨ والدالة د$^{-1}$(س) = $\frac{٨ + س}{٥}$، فإن

د(د$^{-1}$(س)) = د($\frac{٨ + س}{٥}$)

د(د$^{-1}$(س)) = ٥($\frac{٨ + س}{٥}$) − ٨

د(د$^{-1}$(س)) = س

كما أن:

د$^{-1}$(د(س)) = د$^{-1}$(٥س − ٨)

د$^{-1}$(د(س)) = $\frac{٨ + (٥س - ٨)}{٥}$

د$^{-1}$(د(س)) = س

وعليه، فإن الدالّتَين د(د$^{-1}$(س)) = س، د$^{-1}$(د(س)) = س، أي أن كلًا منهما هي دالّة عكسية للأخرى.

مُساعَدة

جميع الدوال الخطية هي واحد إلى واحد وتكون لها دالة عكسية.

نتيجة ٩

د(د$^{-1}$(س)) = س و د$^{-1}$(د(س)) = س

لتجد الدالة العكسية للدالة هـ(س) = $\frac{١}{٤س + ٢}$

الخطوة ١: اكتب ص = هـ(س) ← ص = $\frac{١}{٤س + ٢}$

الخطوة ٢: بادل بين س، ص ← س = $\frac{١}{٤ص + ٢}$

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتجد ص بدلالة س ← س(٤ص + ٢) = ١

٤ص + ٢ = $\frac{١}{س}$

٤ص = $\frac{١}{س}$ − ٢

ص = $\frac{\frac{١}{س} - ٢}{٤}$

ص = $\frac{١}{٤س} - \frac{١}{٢}$

وعليه، فإن هـ$^{-1}$(س) = $\frac{١}{٤س} - \frac{١}{٢}$

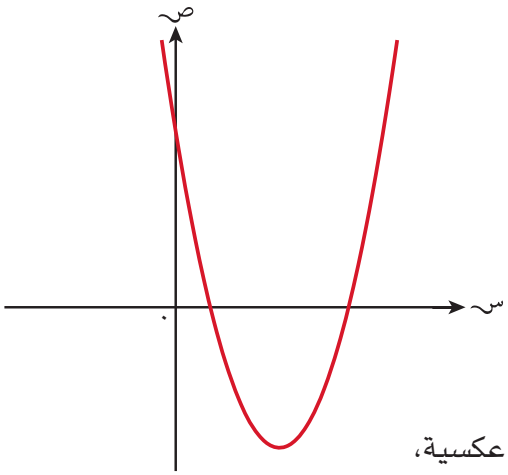
نتيجة ١٠

إذا كانت الدالة د والدالة العكسية لها متساويتَين، فتُسمى الدالة د **بالدالة العكسية لنفسها** **self-inverse function**.

فمثلًا إذا كان د(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠، فإن د$^{-١}$(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠

وعليه، تكون د(س) = $\frac{١}{س}$ لكل س ≠ ٠ دالّة عكسية لنفسها.

استكشف ٢



يبيّن الشكل المجاور الدالة د(س) = س^{٢} − ٦س + ٥ حيث س ∈ ع

ناقش الأسئلة الآتية مع أقرانك في الصف:

١) ما نوع هذه الدالة؟

٢) ما إحداثيات نقطة رأس المنحنى؟

٣) ما مجال الدالة؟

٤) ما مدى الدالة؟

٥) هل يوجد دالة عكسية لهذه الدالة؟

٦) إذا كان للدالة د دالة عكسية، فما معادلتها؟ وإن لم يوجد لها دالة عكسية، فكيف يمكن أن تغيّر مجالها ليصبح لها دالة عكسية؟

مثـال ١٠

إذا كانت د(س) = ٥س − ٣ حيث س ∈ ع، س ≤ ٠

فأوجد د$^{-١}$(س)

الحـلّ:

د(س) = ٥س − ٣

الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص = ← ص = ٥س − ٣

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = ٥ص − ٣

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← س + ٣ = ٥ص

ص = $\frac{س + ٣}{٥}$

∴ د$^{-١}$(س) = $\frac{س + ٣}{٥}$

مثـــال ١١

تسافر منى بالسيارة بمعدل ثابت. تمثل الدالة الآتية المسافة م (بالكيلومترات) من منزل منى بعد ن (٠ ≤ ت ≤ ٣) (ساعات):

م(ن) = ١٢٠ − ٤٠ن

أ أوجد $م^{-١}$

ب فسّر ما تعنيه الدالة $م^{-١}$ في سياق المسألة.

ج أوجد الزمن الذي تستغرقه منى لتكون على بعد ٤٠ كيلومترًا من منزلها مباشرة.

الحـــلّ:

أ م(ن) = ١٢٠ − ٤٠ن ..... اكتب م(ن) = ص

ص = ١٢٠ − ٤٠ن ..... بادل بين ن، ص

ن = ١٢٠ − ٤٠ص ..... أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة ن

ن + ٤٠ص = ١٢٠

٤٠ص = ١٢٠ − ن

$ص = \frac{(١٢٠ - ن)}{٤٠}$

$\therefore م^{-١}(ن) = \frac{(١٢٠ - ن)}{٤٠}$

ب تدلنا $م^{-١}$ على الزمن الذي استغرقته منى عند قطع مسافة ن كيلومترات من منزلها.

ج $م^{-١}(٤٠) = \frac{(١٢٠ - ٤٠)}{٤٠}$

= ٢ ساعة (استغرقت منى ساعتين)

تمارين ٢-٣

١) أوجد $د^{-١}(س)$ لكلّ دالة من الدوال الآتية:

أ) $د(س) = ٥س - ٨$ حيث $س \in ع$

ب) $د(س) = س^{٢} + ٣$ حيث $س \in ع$، $س \leq ٠$

ج) $د(س) = (س - ٥)^{٢} + ٣$ حيث $س \in ع$، $س \leq ٥$

د) $د(س) = \frac{٨}{س - ٣}$ حيث $س \in ع$، $س \neq ٣$

٢) إذا كانت $د : س \leftarrow س^{٢} + ٤س$ حيث $س \in ع$، $س \leq -٢$

أ) أوجد مدى $د(س)$، أي مجال $د^{-١}(س)$

ب) أوجد مدى $د^{-١}(س)$

مُساعَدة

كي تحسب المدى، ارسم منحنى الدالة التربيعية لتحدد نقطة التحول (القيمة الصغرى).

٣) إذا كانت $د : س \leftarrow \frac{٥}{٢س + ١}$ حيث $س \in ع$، $س \leq ٢$

أ) أوجد مدى $د(س)$، أي مجال $د^{-١}(س)$.

ب) أوجد $د^{-١}(س)$.

مُساعَدة

مجال الدالة $د^{-١}(س)$ هو مدى الدالة $د(س)$.
مدى الدالة $د^{-١}(س)$ هو مجال $د(س)$.

٤) إذا كانت $د : س \leftarrow س^{٢} - ٦س$ حيث $س \in ع$

فأوجد مدى الدالة د

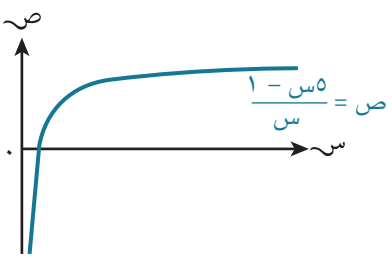
٥) إذا كانت $د(س) = ٣س - ٢٤$ حيث $س \leq ٠$، اكتب مدى $د^{-١}$

٦) يبيّن الشكل المجاور منحنى الدالة

$ص = د^{-١}(س)$، حيث $د^{-١}(س) = \frac{٥س - ١}{س}$

لكل $س \in ع$، $٠ < س \geq ٣$

أوجد $د(س)$.



٧) تتمثل الكلفة ك (بمئات الريالات العُمانية) لإنتاج س سلعة بالدالة

$ك(س) = ١ + ٢,٠س$

تشير الدالة العكسية $ك^{-١}(س)$ إلى عدد السلع التي يمكن إنتاجها لكمية محددة من الأموال. أوجد هذه الدالة.

٨) يُملأ خزان مياه حتى ارتفاع ع سم من صنبور ماء جارٍ بكمّية ضخّ ثابتة. تمثل الدالة أدناه ارتفاع الماء في الخزان في الزمن ن (ثانية) منذ تشغيل الصنبور:

$$ع(ن) = ٠,٢ ن$$

أ أوجد $ع^{-١}(ن)$.

ب فسّر المقصود من الدالة $ع^{-١}$ في سياق المسألة، واذكر الصيغة المناسبة لها.

٢-٤ منحنى الدالة ومنحنى دالتها العكسية

لتكن الدالة د(س) = ٢س + ١، حيث س ∈ ع، −٤ ⩽ س ⩽ ٢

د(−٤) = −٧، د(٢) = ٥

مجال الدالة د هو −٤ ⩽ س ⩽ ٢، ومداها هو −٧ ⩽ د(س) ⩽ ٥

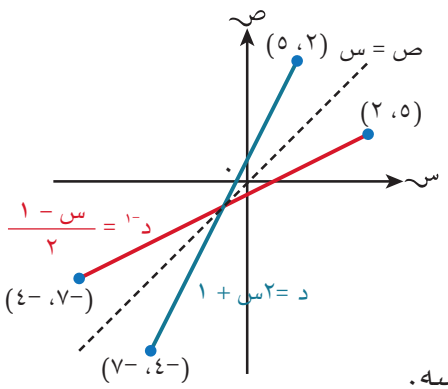
الدالة العكسية للدالة د هي $د^{-١}(س) = \frac{س - ١}{٢}$

مجال الدالة $د^{-١}$ هو: مدى الدالة د

أي أن مجال $د^{-١}$ هو: −٧ ⩽ س ⩽ ٥

مدى الدالة $د^{-١}$ هو: مجال الدالة د

أي أن مدى الدالة: $د^{-١}$ هو −٤ ⩽ $د^{-١}$(س) ⩽ ٢



يبيّن الشكل المجاور التمثيل البياني للدالتَين د، $د^{-١}$ على المستوى الإحداثي نفسه.

من المهمّ أن تلاحظ أن أحد منحنيَي د، $د^{-١}$ انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س، ويُعدّ ذلك صحيحًا لجميع دوال الواحد إلى واحد ودوالها العكسية.

نتيجة ١١

منحنى الدالتَين د، $د^{-١}$ أحدهما انعكاس للآخر حول المستقيم ص = س

يحصل ذلك لأن (د ∘ $د^{-١}$)(س) = س = ($د^{-١}$ ∘ د)(س).

نتيجة ١٢

عندما تكون الدالة د عكسية لنفسها، يكون منحنى الدالة د متماثلًا حول المستقيم ص = س

مثـــال ١٢

إذا كانت د(س) = $س^{٢}$ − ٨س + ١٢ حيث س ∈ ع، ٤ ⩽ س ⩽ ٨

ارسم منحنى الدالة د ومنحنى الدالة $د^{-١}$ على المستوى الإحداثي نفسه.

الحـــلّ:

ص = $س^{٢}$ − ٨س + ١٢ ..... ابدأ برسم المنحنى التربيعي حيث س ∈ ع

عندما س = ٠، ص = $٠^{٢}$ − ٨ × ٠ + ١٢ = ١٢ ..... المقطع الصادي.

عندما ص = ٠، $س^{٢}$ − ٨س + ١٢ = ٠ ..... حلّل إلى العوامل لتحسب المقطعَين السينيَّين.

(س − ٦)(س − ٢) = ٠

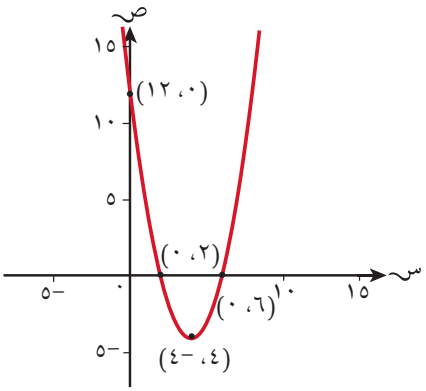
س = ٢ أو س = ٦

∴ نقاط التقاطع هي (٠، ١٢)، (٢، ٠)، (٦، ٠).

س = ٤ ..... محور التماثل لتوجد نقطة التحول.

ص = ٤^{٢} − ٨ × ٤ + ١٢ = −٤

∴ نقطة التحول هي (٤، −٤).

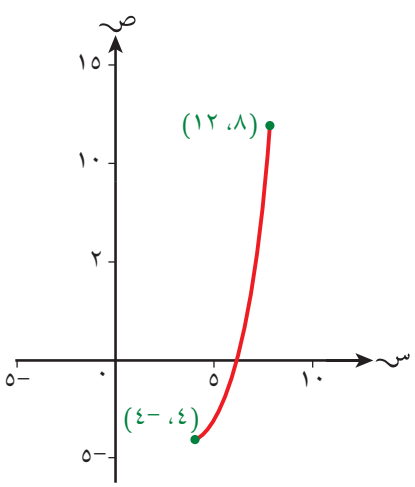


ص = س^{٢} − ٨س + ١٢ حيث س ∈ ع، ٤ ≤ س ≤ ٨ استخدم رسم الدالة ص = د(س) في المجال المحدد.

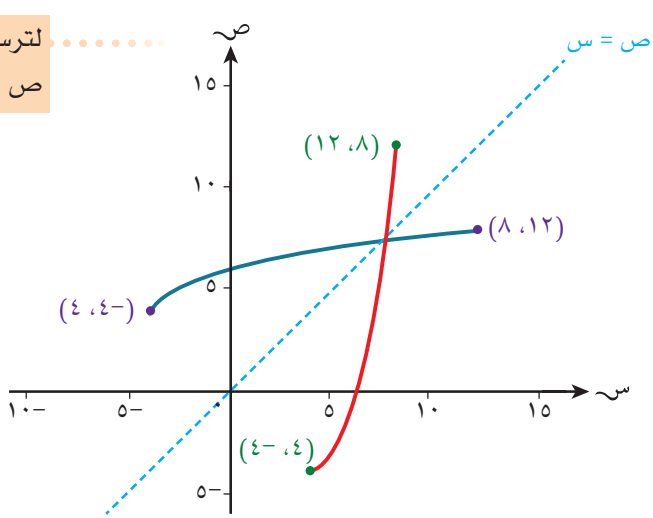
عندما س = ٤ ، ص = −٤

عندما س = ٨، ص = ٨^{٢} − ٨ × ٨ + ١٢ = ١٢ قيمة طرفَي المنحنى.

عند استخدام اختبارَي المستقيم الرأسي والأفقي، نستنتج أن الدالة واحد إلى واحد عند المجال المحدد، ما يدل على أن الدالة العكسية موجودة. يمكننا باستخدام النتيجة أن نرسم الدالة العكسية بانعكاس للدالة حول المستقيم ص = س لنرسم د$^{-١}$



لترسم د$^{-١}$(س)، اعكس منحنى الدالة د حول المستقيم ص = س



مثـــال ١٣

إذا كانت د : س ← $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$ حيث س ∈ ع، س ≠ ٢

أ أوجد $د^{-١}$(س).

ب ماذا نستنتج من الجزئية (أ) عن تماثل المنحنى حول المستقيم ص = س؟

الحـــلّ:

أ د : س ← $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص = ← ص = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص ← س = $\frac{٢ص + ٧}{ص - ٢}$

الخطوة ٣: أعد الترتيب لتكتب ص بدلالة س ← س ص − ٢س = ٢ص + ٧

س ص − ٢ص = ٢س + ٧

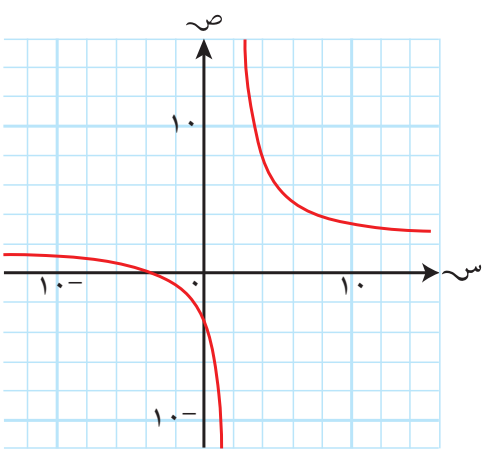
ص(س − ٢) = ٢س + ٧

ص = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

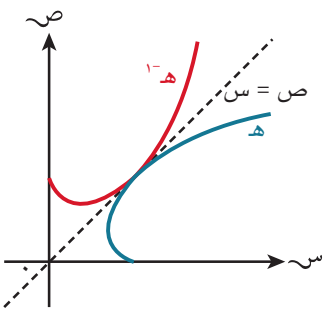
∴ $د^{-١}$(س) = $\frac{٢س + ٧}{س - ٢}$

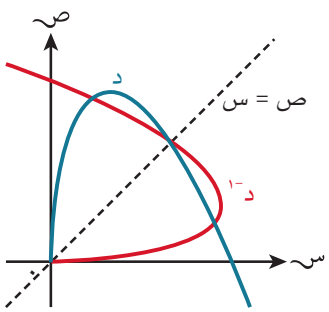
ب ∵ $د^{-١}$(س) = د(س)، فإن الدالة عكسية لنفسها.

∴ منحنى الدالة ص = د(س) متماثل حول المستقيم ص = س



استكشف ٣





تقول شهد ما يأتي:

يبيّن الشكلان الدالتَين د، هـ معًا مع الدالة العكسية لكل منهما د⁻¹، هـ⁻¹

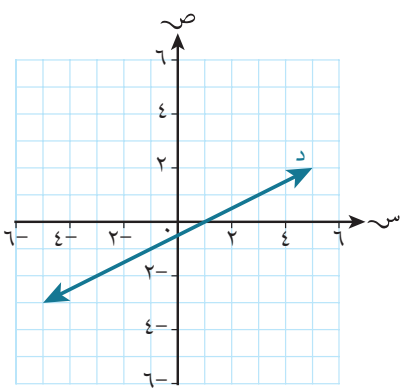
هل ما تقوله شهد صحيح؟

اشرح إجابتك.

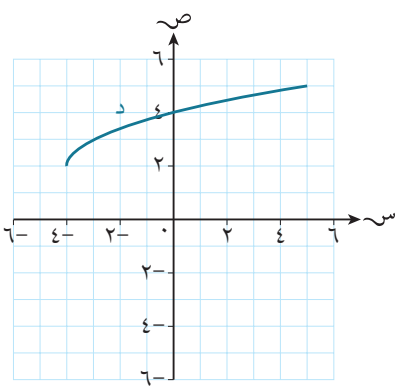
تمارين ٢-٤

١) في كل حالة من الحالات الآتية، ارسم منحنى د⁻¹(س) على المستوى الإحداثي نفسه إن وجد:

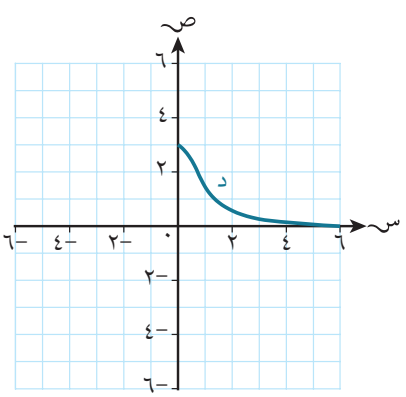
أ



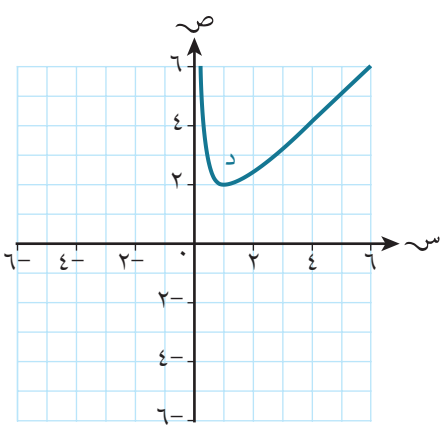
ب



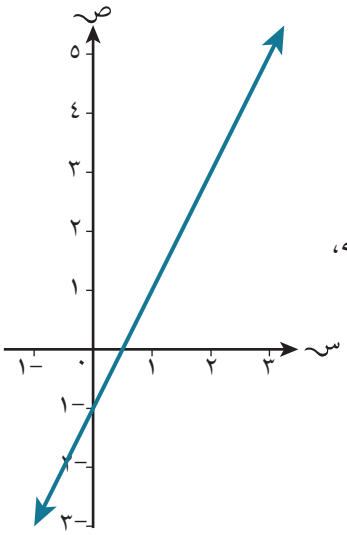
ج



د



٢) إذا كانت د : س ← ٢س − ١ حيث س ∈ ع، −١ ≤ س ≤ ٣



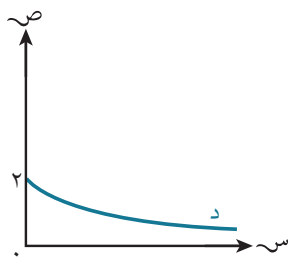
أ) أوجد $د^{-١}$(س).

ب) حدّد مدى د(س)، أي مجال $د^{-١}$(س).

ج) أوجد مدى $د^{-١}$(س).

د) انسخ الشكل وارسم منحنى ص = $د^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه، موضحًا العلاقة بين المنحنيَين.

٣) يبيّن الشكل المجاور منحنى ص = د(س) عندما د(س) = $\frac{٤}{س + ٢}$ حيث س ∈ ع، س ≤ ٠



أ) حدد مدى د(س)، أي مجال الدالة $د^{-١}$(س).

ب) أوجد $د^{-١}$(س).

ج) أوجد مدى $د^{-١}$(س).

د) انسخ الشكل وارسم منحنى ص = $د^{-١}$(س) على المستوى الإحداثي نفسه، موضحًا العلاقة بين المنحنيَين.

قائمة التحقّق من التعلّم والفهم

الدوال

- الدالة هي علاقة بين مجموعتين حيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية.
- قد تكون الدالة واحد إلى واحد أو متعدّد إلى واحد.
- تُسمّى مجموعة المدخلات مجال الدالة.
- تُسمّى مجموعة المخرجات مدى الدالة.

تركيب الدوال

- (د ○ هـ)(س) تعني إجراء الدالة هـ بدل س في د، ثم إجراء د على الناتج.
- تكون (د ○ هـ)(س) موجودة (فقط) عندما يكون مدى هـ متضمَّنًا في مجال د
- بصورة عامة، (د ○ هـ)(س) ≠ (هـ ○ د)(س).

الدوال العكسية

- الدالة العكسية للدالة د(س) هي دالة تعكس ما تقوم به الدالة د(س).

  (د ○ د$^{-1}$)(س) = (د$^{-1}$ ○ د)(س) = س أو إذا ص = د(س) فإن س = د$^{-1}$(ص).
- تكتب الدالة العكسية للدالة د(س) في صورة د$^{-1}$(س).
- خطوات إيجاد الدالة العكسية هي:

  الخطوة ١: اكتب الدالة في صورة ص =

  الخطوة ٢: بادل بين المتغيّرَين س، ص

  الخطوة ٣: أوجد ص بدلالة س
- مجال د$^{-1}$(س) هو مدى د(س).
- مدى د$^{-1}$(س) هو مجال د(س).
- يمكن إيجاد الدالة العكسية د$^{-1}$(س) إذا كانت د(س) دالة واحد إلى واحد فقط.
- منحنى د$^{-1}$(س) هو انعكاس لمنحنى د(س) حول المستقيم ص = س
- إذا كان د(س) = د$^{-1}$(س) فتسمّى الدالة د عكسية لنفسها.
- إذا كانت الدالة د عكسية لنفسها، فإن (د ○ د)(س) = س
- يكون منحنى الدالة العكسية لنفسها متماثلًا حول المستقيم ص = س

تمارين مراجعة نهاية الوَحدة الثانية

١) إذا كانت د دالة معرفة كالآتي: د(س) = س^{٢} − ١ حيث −١٠ ⩽ س ⩽ ٨

أ أوجِد مدى د

ب اكتب مجالًا مناسبًا للدالة د حيث تكون الدالة د$^{-١}$ موجودة.

٢) إذا كانت الدالتان د، هـ معرفتَين لكل قيم س الحقيقية كالآتي:

د(س) = $\sqrt{س - ١}$ − ٣ حيث س > ١

هـ(س) = $\frac{س - ٢}{٢س - ٣}$ حيث س > ٢

أ أوجِد (هـ ○ د)(٣٧).

ب أوجِد د$^{-١}$(س).

ج أوجِد هـ$^{-١}$(س).

٣) إذا كانت الدالة هـ معرفة كالآتي: هـ(س) = $\frac{١}{٢س - ١}$ حيث ١ ⩽ س ⩽ ٣

أ أوجِد مدى الدالة هـ

ب أوجِد هـ$^{-١}$(س).

ج اكتب مجال هـ$^{-١}$(س).

٤) أ إذا كانت الدالتان د، هـ معرفتَين حيث س ∋ ع كالآتي:

د: س ← ٢س + ٣

هـ: س ← س^{٢} − ١

فأوجِد (د ○ هـ)(٤).

ب إذا كانت الدالتان ع، ل معرفتَين حيث س > ٠ كالآتي:

ع: س ← س + ٤

ل: س ← $\sqrt{س}$

فاكتب كل دالة من الدوال الآتية بدلالة دوال مركبة من الدالتَين ع، ل:

١) س ← $\sqrt{س + ٤}$

٢) س ← س + ٨

٥) إذا كانت الدالة د معرفة كالآتي: د(س) = ٢ − $\sqrt{\text{س} + ٥}$ حيث −٥ ≤ س ≤ ٠

أ) اكتب مدى الدالة د

ب) أوجِد $د^{-١}$(س) ومجالها ومداها.

ج) الدالة هـ معرفة كالآتي: هـ(س) = $\frac{٤}{\text{س}}$ حيث −٥ ≤ س ≤ −١

حلّ المعادلة (د ○ هـ)(س) = ٠

٦) إذا كانت الدالتان د، هـ معرفتَين على س ∋ ع كما يأتي:

د: س ← ٣س − ١

هـ: س ← ٥س − $\text{س}^{٢}$

فاكتب (هـ ○ د)(س) في صورة أ$\text{س}^{٢}$ + ب س + جـ حيث أ، ب، جـ ثوابت.

٧) إذا كانت الدالة د: س ← $\text{س}^{٢}$ − ٤ معرّفة على المجال س ≤ ٠

أ) أوجد $د^{-١}$(س) وحدّد مجال الدالة $د^{-١}$

ب) ارسم منحنى د ومنحنى $د^{-١}$ على المستوى الإحداثي نفسه.

٨) يتمثل ارتفاع كرة ع (متر) فوق سطح الأرض عندما تسقط على الأرض في الزمن ن (ثانية) بالدالة:

ع(ن) = ٢٠ − ٥$\text{ن}^{٢}$

ما مجال الدالة ع ومداها في سياق المسألة؟

٩) أجرة سيارة الأجرة معطى بالدالة:

ك(م) = ١,٥ + ٠,٢م

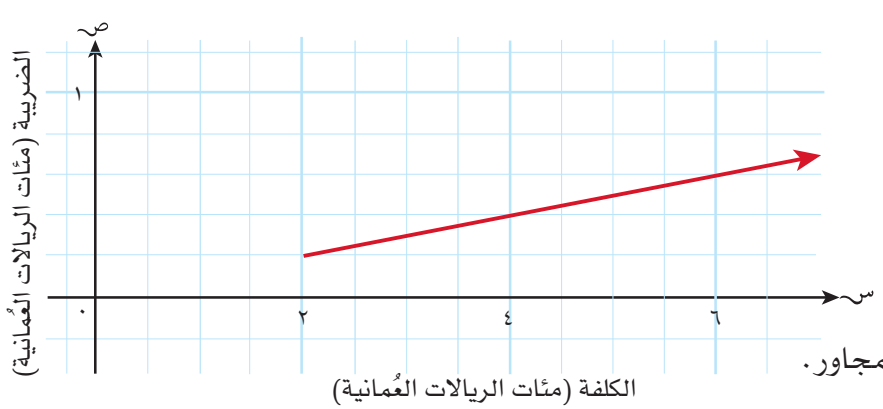
حيث م عدد الكيلومترات التي تمّ اجتيازها.

أ) أوجد عبارة $ك^{-١}$(م).

ب) فسّر المقصود من الدالة $ع^{-١}$ في سياق المسألة. أعد كتابة $ك^{-١}$ مستخدمًا متغيرات مناسبة تصلح في سياق المسألة.

١٠) يمثل التمثيل المقابل الضريبة ض (مئات الريالات العُمانية) التي تطبّق عند شحن منتج يعتمد على كلفة ك (مئات الريالات العُمانية) المنتج.

اكتب مجال دالة الضريبة ومداها كما هو ممثّل في التمثيل البياني المجاور.



الرياضيات الأساسية

الصف الحادي عشر

كتاب الطالب

يتضمن هذا الكتاب:

- جداول معرفة قبلية للتذكر والتحقق من التعلم السابق.
- مهارات رياضية جديدة مع أمثلة محلولة تتضمن تفسيرات واضحة.
- أسئلة تطبيقية لمساعدة الطلبة على تعزيز معرفتهم والتقدم من خلال المنهج الدراسي.
- أنشطة تشجع على مناقشة المفاهيم الرياضية.
- فرص لإجراء استقصاءات أعمق في كيفية تطبيق الرياضيات لحل مجموعة متنوعة من المسائل.
- قائمة تقييم ذاتي للتحقق من التعلم والفهم.
- أسئلة مراجعة نهاية الوحدة ليتحقق الطالب من إتقانه للمهارات التي درسها في الوحدة.

يشمل منهج الرياضيات الأساسية للصف الحادي عشر أيضًا:

- كتاب النشاط.
- دليل المعلّم.

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

www.moe.gov.om